

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 25

Colloquium Methoden der Mathematische Physica 2

Niet Lineaire Differentiaalvergelijkingen.

Timman R.



1956

Methoden der Mathematische Physica 2o.l.v. Prof. Dr R. TimmanOnderwerp: Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

Eerste voordracht: 20 januari 1956

1. Inleiding.

In feit zijn vrijwel alle problemen, die in de mechanica optreden, niet lineair. Desalniettemin worden de meeste onderzoeken verricht aan de gelineariseerde theorie, ten dele, omdat deze theorie voor vele gevallen een goede benadering geeft, anderzijds omdat alleen met de gelineariseerde benadering resultaten te bereiken zijn. In de laatste decennia zijn echter op het niet-lineaire gebied aanmerkelijke vorderingen gemaakt, die, naar het schijnt, nog betrekkelijk weinig worden toegepast. Het is de bedoeling hier uitsluitend de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen te behandelen, daar enerzijds de niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, die in de mechanica optreden (gasdynamica, plasticiteitsleer) veel gecompliceerder zijn, maar anderzijds quasi-lineair zijn, zodat het karakter der te gebruiken methoden sterk verschilt van die welke bij gewone differentiaalvergelijkingen worden gebruikt.

Verder wordt, althans in de inleiding, de beperking gemaakt tot systemen van de tweede orde, daar hier een aanschouwelijke voorstelling kan worden gegeven, die bij systemen van hogere orde in het algemeen ontbreekt.

Literatuur

- S. Lefschetz: Lectures on differential equations, Annals of Mathematics studies, 14, Princeton, 1948.
- S. Lefschetz: Contributions to the theory of non-linear oscillations I and II, Annals of Mathematics studies, 20 and 29, 1950 and 1952.
- J.J. Stoker: Non-linear Vibrations, Interscience Publishers 1950.
- N. Minorsky: Non-linear Mechanics, J.W. Edwards, Ann Arbor 1947.

Hoofdstuk I

Algemene stellingen voor systemen van de tweede orde.

1. Lineaire stelsels.

Wij beschouwen systemen differentiaalvergelijkingen in de vorm

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = P(x,y) ; \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

waarbij P en Q reële gehele functies zijn en waarbij de punten $P=Q=0$, de singuliere punten van de vergelijking geïsoleerd zijn, zodanig, dat in ieder eindig gebied van het (x,y) vlak een eindig aantal van deze punten liggen.

Nemen wij een singulier punt als oorsprong O van het coördinatenstelsel, dan geldt in een omgeving van O

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x,y). \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x,y). \end{cases}$$

waarbij de ontwikkeling van P_2 en Q_2 begint met termen van de tweede graad.

Wij zullen later de stelling van Poincaré bewijzen, dat de baankrommen van (2) in de omgeving van de oorsprong worden benaderd (met een uitzonderingsgeval) door de baankrommen van het lineaire stelsel

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by. \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases}$$

indien $ad - bc \neq 0$ is.

Om de baankrommen van het lineaire systeem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by. \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (3)$$

te vinden, zoeken wij eerst een lineaire transformatie

$$\begin{cases} u = \alpha x + \beta y \\ v = \gamma x + \delta y \end{cases} \quad (4)$$

met $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

zodanig, dat de vergelijkingen (3) overgaan in

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda_1 u. \\ \frac{dv}{dt} = \lambda_2 v. \end{cases} \quad (5)$$

of wel

$$\alpha(ax + by) + \beta(cx + dy) = \lambda_1(\alpha x + \beta y). \quad (6)$$

$$\gamma(ax + by) + \delta(cx + dy) = \lambda_2(\gamma x + \delta y).$$

Hieruit volgt

$$\begin{cases} (a - \lambda_1)\alpha + c\beta = 0 \\ b\alpha + (d - \lambda_1)\beta = 0. \end{cases} \quad (7)$$

en evenzo

$$\begin{cases} (a - \lambda_2)\gamma + c\delta = 0 \\ b\gamma + (d - \lambda_2)\delta = 0. \end{cases} \quad (8)$$

λ_1 en λ_2 zijn dus de wortels van

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

$$\text{of } \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (10)$$

Wij onderscheiden dus de volgende gevallen:

a) $D = (a-d)^2 + 4bc > 0.$

twee reële wortels:

$$ad - bc > 0$$

λ_1 en λ_2 hetzelfde teken.

De oplossing van de vergelijkingen is

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{\lambda_1 t} \\ v &= C_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

De baankrommen zijn dus:

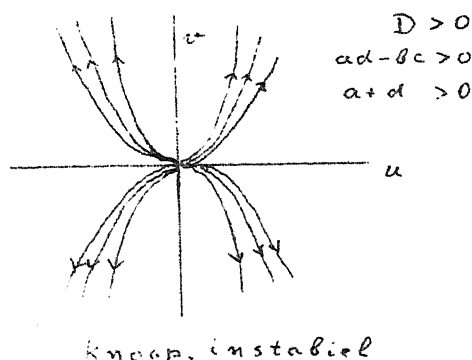
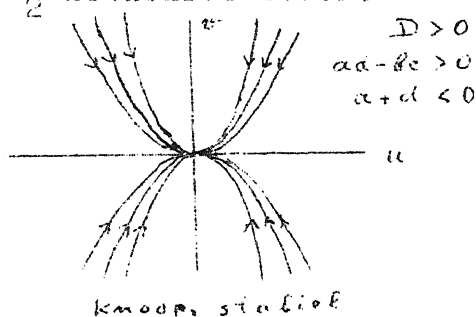
$$v = C \cdot u^{\lambda_2 / \lambda_1}$$

en de exponent is positief.

Zij hebben dus nevenstaande gedaante, als wij $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ kiezen. Het singuliere punt heet een knoop.

Als λ_1 en λ_2 beide positief zijn, dus $a+d > 0$ beweegt het punt zich van de oorsprong af, de knoop is instabiel.

als $a+d < 0$, dan beweegt het punt zich met toenemende t naar de oorsprong toe, het punt is stabiel.

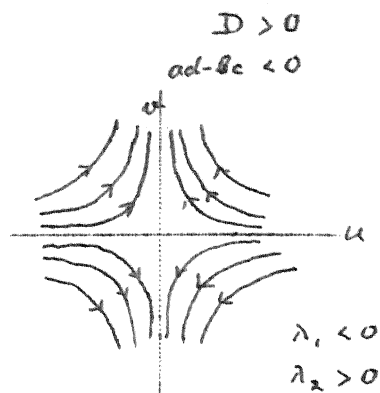


Als $ad - bc < 0$ hebben λ_1 en λ_2 tegengesteld teken, de baankrommen

$$v = C \cdot u^{\lambda_2/\lambda_1}$$

hebben dus de assen tot asymptoten, alleen $u=0$ en $v=0$ gaan door de oorsprong. Het punt is een zadelpunt.

b) $D < 0$.



In dit geval zijn de wortels complex

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 + i\mu_2 \\ \lambda_2 = \mu_1 - i\mu_2 \end{cases}$$

en ook de bijbehorende u en v zijn toegevoegd complex.

Voer dus in de reële

$$u_1 = \frac{1}{2}(u + v),$$

$$v_1 = \frac{1}{2}(u - v),$$

dan wordt:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{1}{2}(\lambda_1 u + \lambda_2 v) = \mu_1 u_1 + \mu_2 v_1$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{2}(\lambda_1 u - \lambda_2 v) = \mu_1 v_1 - \mu_2 u_1$$

of ook

$$\frac{du_1}{dv_1} = \frac{\mu u_1 + v_1}{-u_1 + \mu v_1}$$

Veronderstel eerst, dat

$$\mu = \mu_1/\mu_2 \neq 0 \text{ is.}$$

Deze vergelijking integreren wij door poolcoördinaten in te voeren:

$$\begin{cases} u_1 = \rho \cos \vartheta \\ v_1 = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Dan wordt:

$$-[u_1 du_1 + v_1 dv_1] = [u_1 dv_1 - v_1 du_1] \mu$$

of

$$\begin{aligned} -d\rho &= \mu \rho d\vartheta \\ \rho &= C \cdot e^{-\mu \vartheta} \end{aligned}$$

De baankrommen zijn dus spiralen, voor $\mu_1 > 0$ is het singuliere punt instabiel, voor $\mu_1 < 0$ is het stabiel.

Als $\mu_1 = 0$, dan zijn de wortels

zuiver imaginair en de vergelijking voor de baankrommen wordt:

$$\rho = \text{const.}$$

Zij zijn dus cirkels in het u_1, v_1 vlak, dus ellipsen in het x, y vlak. Het punt heet een centrum.

c) Indien $D \neq 0$ is,

zijn de wortels gelijk en de

transformatie voor de kanonische vorm wordt

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u, \\ \frac{dv}{dt} = u + \lambda v. \end{cases}$$

of

$$\begin{cases} \alpha(ax + by) + \beta(cx + dy) = \lambda(\alpha x + \beta y) \\ \gamma(ax + by) + \delta(cx + dy) = \alpha x + \beta y + \lambda(\gamma x + \delta y). \end{cases}$$

waarbij $(a-d)^2 = -4bc$ en $\lambda = \frac{a+d}{2}$

α en β worden bepaald uit

$$\begin{cases} \frac{a-d}{2} \alpha + c\beta = 0 \\ b\alpha - \frac{a-d}{2} \beta = 0. \end{cases}$$

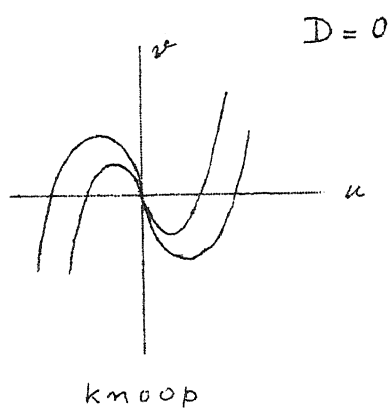
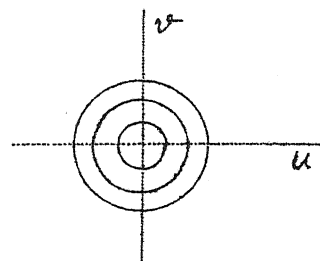
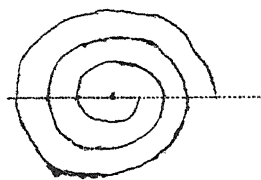
γ en δ uit:

$$\begin{cases} \frac{a-d}{2} \gamma + c\delta = \alpha \\ b\gamma - \frac{a-d}{2} \delta = \beta. \end{cases}$$

waarbij dus γ en δ nog een graad van vrijheid overhouden.

Stel nog $\lambda v = w$, $\lambda t = \tau$ dan wordt de standaardvorm

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u \\ \frac{dw}{d\tau} = u + w. \end{cases}$$



met als oplossing:

$$u = C e^{\tau}, \quad v = C \tau e^{\tau} + D e^{\tau} \quad \text{of} \quad w = u \cdot \ln u / C + D/C \cdot u.$$

Ook in dit geval is de oorsprong een knoop.

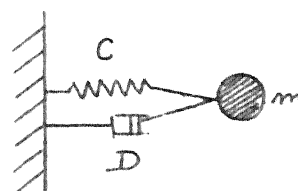
De figuren in het x, y vlak ontstaan uit de hier genoemde door affiene transformatie.

Toepassingen.

1. Trillingen van een systeem met visceuze demping.

De beweging van een systeem, bestaande uit een massapunt, massa m , met overconstante C en demping D wordt beheerst door de vergelijking

$$m \ddot{x} + D \dot{x} + C x = 0.$$



waarbij men C en voor demping ook $D > 0$ is.

Wij voeren eerst dimensieloze grootheden in

$$\omega t = \tau$$

waarbij $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$

en

$$\gamma = \frac{D}{\sqrt{cm}}.$$

en stellen

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y. \\ \frac{dy}{d\tau} = -\gamma y - x. \end{cases}$$

De kritieke determinant wordt

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda - \gamma \end{vmatrix} = 0$$

met $\lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 - 4}$.

Het gedrag van de wortels is verschillend, al naar mate $\gamma > 2$ of $\gamma < 2$.
 $\gamma > 2$ Aperiodieke gedempte trilling.

λ_1 en λ_2 zijn beide negatief. $\lambda_2 < \lambda_1$

De nieuwe variabelen worden

$$\begin{cases} u = -x - \lambda_1 y. \\ v = x - \lambda_2 y. \end{cases}$$

en het systeem wordt:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda_1 u \\ \frac{dv}{dt} = \lambda_2 v. \end{cases}$$

met de oplossing: $u = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$, $v = C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$.
 $\lambda_2/\lambda_1 > 1$.

Het punt is een knooppunt. De baan-
 krommen raken allen aan de lijn $u=0$,
 dus $x = \lambda_1 y$. Met toenemende t gaan
 x en y naar nul, het punt in de
 phaseruimte gaat dus naar de oor-
 sprong toe, de trilling is gedempt
 en aperiodiek.

In het geval $\chi < 2$ zijn de twee
 cirkels toegevoegd complex.
 De nieuwe variabelen worden

$$\begin{aligned} u &= x - \lambda_1 y \\ v &= x - \lambda_2 y. \end{aligned}$$

Zij zijn toegevoegd complex.
 Voer dus in

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} (u + v) = x + \frac{\chi}{2} y. \\ v_1 = \frac{1}{2} (u - v) = \frac{-1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2) y = \frac{\sqrt{4 - \chi^2}}{2} \cdot y. \end{cases}$$

en daarna poolcoördinaten:

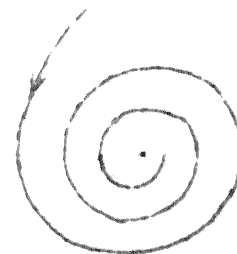
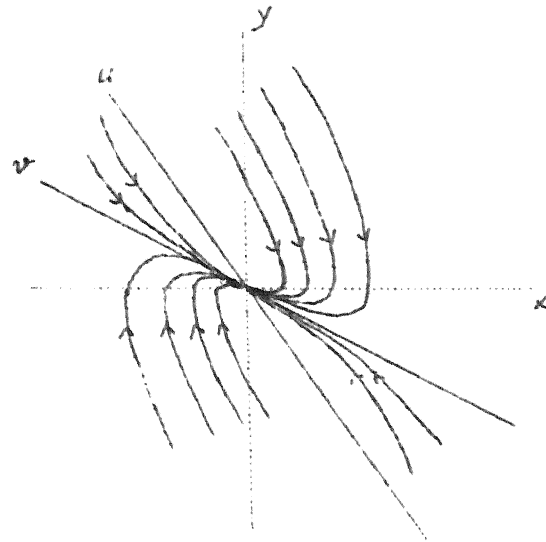
$$\begin{aligned} u_1 &= \rho \cos \vartheta \\ v_1 &= \rho \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Dan wordt de vergelijking van de baankrommen in de phaseruimte

waarbij $\mu = \frac{\sqrt{4 - \chi^2}}{\chi}$. $\rho = C \cdot e^{-\mu \vartheta}$

Ook hier komt het punt tenslotte tot
 rust, maar beschrijft een spiraal,
 zodat het eerst oneindig dikwijls om
 de oorsprong heenloopt, de trilling
 is periodiek en gedempt.

In het geval $\rho = 2$ is het aperiodieke grensgeval, de baankrommen lopen
 naar de oorsprong toe en raken allen aan een lijn.



2. Trillingen van een systeem met een niet lineaire elastische kracht.

Het vorige voorbeeld was een lineaire vergelijking, de methode is echter even goed bruikbaar voor niet lineaire trillingen.

Beschouw een trilling met niet lineaire elasticiteit

$$m \ddot{x} + c(x) = 0$$

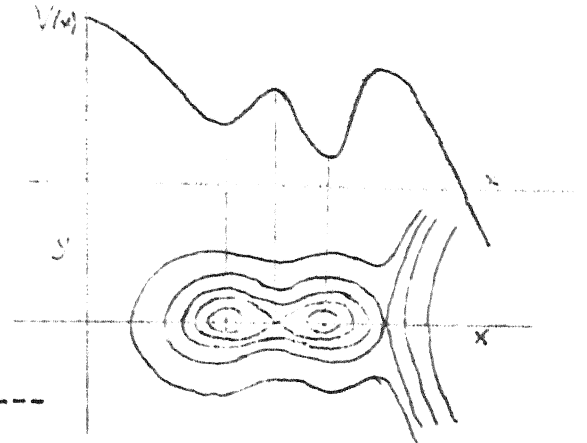
of, als wij $\frac{c(x)}{m} = f(x)$ stellen

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

Hierbij is $f(0) = 0$.

Ontwikkeling naar x geeft

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$



Integratie van de vergelijking geeft de energievergelijking

$$\frac{1}{2} \dot{y}^2 + \int_0^x f(x) dx = c$$

waarbij $y = \dot{x}$.

In de faseruimte zijn de trajectorieën dus de niveaукrommen van de functie

$$E(x, y) = \frac{1}{2} \dot{y}^2 + V(x)$$

waarbij $V(x) = \int_0^x f(x) dx$ een gegeven functie is.

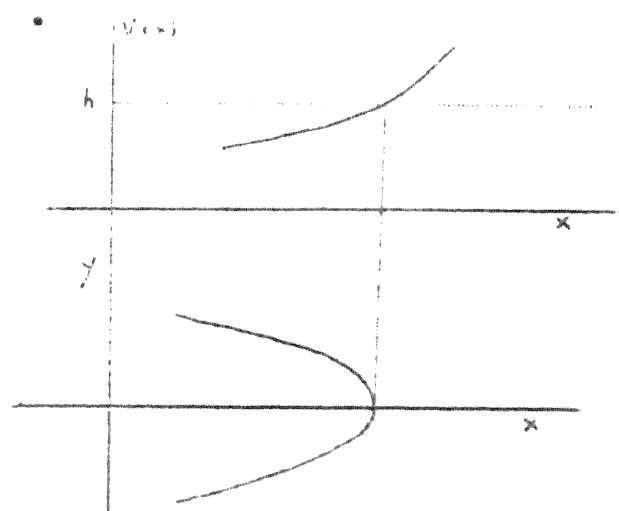
De singuliere punten van het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases}$$

zijn de extremen van de functie $E(x, y)$.

Zij liggen op de x as.

De baankrommen kunnen direct worden getekend: door aan een hulpdiagram de waarden van $h - V(x)$ te ontlezen. Heeft $V(x)$ een minimum dan liggen voor dit minimum hun gesloten baankrommen, het punt is voor het oppervlak $E(x, y)$ een elliptisch punt, een relatief maximum is een hyperbolisch punt.



17 februari 1956

2. Algemene theorie van het gedrag van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen in de omgeving van een kritiek punt.

1. Het existentiebewijs.

Wij beschouwen een systeem van de vorm:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, t)\end{aligned}$$

dat wij in vectorvorm schrijven

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{F}(\bar{x}, t). \quad (1)$$

Allereerst beschouwen wij de existentie van de oplossingen van dit systeem.

Laat \bar{F} een continue functie zijn van de vector \bar{x} . In dit geval heeft het systeem (1) een oplossing, die voor $t=0$ de waarde \bar{a} aanneemt. Dit bewijzen we met de methode van Picard, waarbij de vergelijking wordt omgezet in een integraalvergelijking

$$\bar{x} = \bar{a} + \int_0^t \bar{F}(\bar{x}, \tau) d\tau.$$

Wij beschouwen het systeem van opvolgende benaderingen

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{a} + \int_0^t \bar{F}(\bar{x}_n, \tau) d\tau \quad \bar{x}_0 = \bar{a}$$

Om schattingen te kunnen maken, voeren wij in de maat voor de vector $\|\bar{z}\| = |z_1| + \dots + |z_n|$.

Dan is

$$\|\bar{x}_{n+1} - \bar{a}\| \leq \int_0^t \|\bar{F}(\bar{x}_n, \tau)\| d\tau.$$

Laat $\bar{F}(\bar{z}, t)$ continu zijn in het gebied R

$$\|\bar{z} - \bar{a}\| \leq r$$

Dan is ook $\|\bar{F}(\bar{z}, t)\|$ continu in dat gebied en heeft dus een maximum M:

$$\|F(\bar{z}, t)\| \leq M$$

Dan geldt

$$\|x_{n+1} - a\| \leq M \int_0^t d\tau = Mt$$

zolang $Mt < r$, ligt $\|x_{n+1} - a\|$ in R .

Om de convergentie van de rij x_{n+1} te bewijzen, onderzoeken wij de reeks:

$$x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n).$$

Nu is

$$\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = \int_0^t \{F(\bar{x}_n, \tau) - F(\bar{x}_{n-1}, \tau)\} d\tau.$$

De continuïteit van $F(x, t)$ is niet voldoende, er moet nog een zekere relatie bestaan tussen $F(x_n, \tau) - F(x_{n-1}, \tau)$.

Wij onderstellen dus, dat F voldoet aan de voorwaarde van Lipschitz

$$\|F(\bar{x}, t) - F(\bar{y}, t)\| \leq c \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

voor x en y in R .

Dan is

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n\| &\leq \int_0^t \|F(\bar{x}_n, \tau) - F(\bar{x}_{n-1}, \tau)\| d\tau \leq \\ &\leq c \int_0^t \|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\| d\tau \end{aligned}$$

Nu is

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\| \leq c \int_0^t F(\bar{a}, \tau) d\tau \leq cMt, \text{ dus}$$

$$\|\bar{x}_2 - \bar{x}_1\| \leq c \int_0^t \|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\| d\tau \leq \frac{c^2 Mt^2}{2}.$$

en

$$\|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n\| \leq \frac{c^{n+1} Mt^{n+1}}{(n+1)!}$$

De reeks $\|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n\|$ convergeert dus uniform nu $0 < t < \frac{r}{M}$. en de rij van vectoren \bar{x}_n convergeert tot een vector \bar{x} , die aan de integraalvergelijking voldoet.

De existentie is hiermee bewezen. Ook is onder de gegeven voorwaarden de eenduidigheid te bewijzen.

Denk, dat een tweede oplossing \bar{y} bestaat van de integraalvergelijking. Daarvoor $t=0$ \bar{y} in R ligt en y continu is, ligt het voor zekere waarden $0 < t < t_0$ nog in R .

Dan geldt:

$$\|\bar{x}_{n+1} - \bar{y}\| \leq \int_0^t \|\bar{F}(\bar{x}_n) - \bar{F}(\bar{y})\| d\tau \leq c \int_0^t \|\bar{x}_n - \bar{y}\| d\tau$$

maar

$$\|\bar{x}_0 - \bar{y}\| \leq \int_0^t \|\bar{F}(\bar{y})\| d\tau = Mt$$

dus:

$$\|\bar{x}_{n+1} - \bar{y}\| \leq \frac{Mc^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}$$

d.w.z.

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| \rightarrow 0.$$

dus \bar{y} en \bar{x} vallen samen.

Wij hebben dus bewezen:

Als in een gebied R , waarvoor geldt $\|x-a\| < r$ de vectorfunctie $\bar{F}(\bar{x})$ voldoet aan:

$$\|\bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{y})\| \leq c\|\bar{x} - \bar{y}\|, \quad (\text{met vaste } c)$$

dan bestaat er één en slechts één oplossing van

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{F}(\bar{x}, t)$$

die voldoet aan

$$\bar{x}(0) = \bar{a}.$$

voor alle waarden van t , die liggen in $0 \leq t \leq \frac{M}{r}$, waarbij $M = \max \|\bar{F}(\bar{x})\|$ in R .

Door steeds verder te gaan kunnen wij de existentie van de oplossing bewijzen voor een veel groter gebied en grotere waarden van t .

Passen wij dit toe op het lineaire systeem

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t) \bar{x}$$

waarbij $A(t)$ een matrix is, dan blijkt er een matrix Y te bestaan, die voldoet aan

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y$$

waarbij voor $t=0$

$$Y = I.$$

Y is niet singulier in het interval, want

$$Y = |Y| = \exp \left\{ \int_0^t \sum_{i=1}^n a_{ii}(\tau) d\tau \right\}.$$

De kolomvectoren \bar{y}^i van deze matrix zijn oplossingen van de vergelijking en hebben als beginwaarden

$$\bar{y}^i(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De vector \bar{y} met beginwaarden $\begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$ kunnen wij dus schrijven als:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{y}^i.$$

2. De stelling van Liapounoff.

Om het gedrag van het niet-lineaire systeem

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{F}(\bar{x}, t)$$

te beschouwen in de omgeving van een singulier punt, waar

$$\bar{F}(\bar{x}, t) = 0$$

voor een zekere t , kiezen wij dit punt als oorsprong van het coördinatenstelsel en leggen $t=0$ op dit tijdstip vast.

Nu veronderstellen wij, dat wij \bar{F} in de omgeving kunnen benaderen door een lineaire functie van \bar{x}

$$\bar{F}(\bar{x}, t) = A(t) \cdot \bar{x} + \bar{g}(\bar{x}, t) \quad (1)$$

waarbij

$$\frac{\|\bar{g}(\bar{x}, t)\|}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0 \text{ als } \|\bar{x}\| \rightarrow 0$$

in zekere omgeving van $x=0$, en $A(t)$ continu is voor $0 \leq t \leq T$.

Allereerst beschouwen wij de klassieke stelling van Liapounoff voor eindige t en leggen aan $\bar{g}(\bar{x}, t)$ de voorwaarde op:

$$\frac{\|\bar{g}(\bar{x}, t)\|}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0 \text{ als } \|\bar{x}\| \rightarrow 0$$

en wel uniform voor alle t met $0 \leq t \leq T$.

$$\|\bar{g}(\bar{x}, t) - \bar{g}(\bar{y}, t)\| < c \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

voor alle t en $\|\bar{x}\| \leq r$, $\|\bar{y}\| \leq r$, waarbij $c \rightarrow 0$ als $r \rightarrow 0$.

Liapounoff onderstelt, dat $\bar{g}(\bar{x}, t)$ voor $\|\bar{x}\| < r$ analytisch is en dat de reeksontwikkeling begint met termen van de tweede graad. Dit geval voldoet zeker aan de bovengenoemde voorwaarden.

Wij zetten de differentiaalvergelijking om in een integraalvergelijking met behulp van de eenheidsoplossing Y van het lineaire stelsel. Een oplossing hiervan, die voldoet aan de beginvoorwaarden $\bar{y} = \bar{a}$ wordt gegeven door

$$\bar{y} = Y \cdot \bar{a}.$$

Stel nu

$$\bar{x} - Y\bar{a} = Y\bar{u}$$

dan geldt voor \bar{u} de differentiaalvergelijking:

$$\bar{a} \cdot \frac{dY}{dt} + \bar{u} \frac{dY}{dt} + Y \frac{d\bar{u}}{dt} = AY(\bar{a} + \bar{u}) + \bar{g}(\bar{x}, t)$$

of wel:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = Y^{-1} \cdot \bar{g}(\bar{x}, t)$$

en

$$\bar{u} = \int_0^t Y(\tau)^{-1} \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau$$

zodat \bar{x} voldoet aan de integraalvergelijking:

$$\bar{x} = \bar{a}Y + \int_0^t Y(t) \cdot Y(\tau)^{-1} \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau$$

waarbij

$$Y(t) \cdot Y(\tau)^{-1} = Y(t - \tau)$$

zodat

$$\bar{x} = \bar{a}Y + \int_0^t Y(t - \tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau.$$

Wij beschouwen nu het iteratiesysteem:

$$\begin{aligned} x_0 &= y = aY \\ x_{n+1} &= aY + \int_0^t Y(t - \tau) \cdot \bar{g}(\bar{x}_n, \tau) d\tau \end{aligned}$$

en laten eerst zien, dat als $\|a\|$ en T klein genoeg zijn $\|x_n\|$ begrensd blijft en daarna, dat x_n convergeert is.

Uit de recursie formule volgt:

$$\|x_{n+1}\| \leq \|a\| \|Y\| + \|Y\| \cdot \int_0^t \|\bar{g}(\bar{x}_n, \tau)\| d\tau.$$

De matrix Y is begrensd, bij elke T behoort een getal M , zodat $\|Y\| < M$ voor $0 \leq t \leq T$.

Dan is voor $t < T$

$$\|x_{n+1}\| \leq \|a\| \cdot M + M \cdot \int_0^t \|\bar{g}(\bar{x}_n, \tau)\| d\tau.$$

Nu bewijzen wij, dat als $\|a\|$ klein genoeg is dat er ook een T is, zodat

$$\|x_{n+1}\| \leq 2 \|a\| M$$

als $\|x_n\| \leq 2 \|a\| M$.

Immers, bij voldoende kleine $\|x\|$ is bij een gegeven ϵ

$$\|\bar{g}(\bar{x}_n, \tau)\| < \epsilon \|x_n\| < 2\epsilon \|a\| M.$$

dus:

$$\|x_{n+1}\| \leq \|a\| M + 2\epsilon T \|a\| M.$$

Kiezen wij dus

$T < \frac{1}{2\epsilon}$, en passen $\|a\|$ aan, zodat $2 \|a\| M$ bij ϵ behoort, dan is $\|x_{n+1}\| \leq 2 \|a\| M$.

Daar $\|x_0\| \leq \|a\| M$, is $\|x_n\|$ begrensd.

Nu laten wij zien, dat de reeks convergeert:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \int_0^t \|Y(t-\tau)\| \cdot \|\bar{g}(\bar{x}_n, \tau) - \bar{g}(\bar{x}_{n-1}, \tau)\| d\tau$$

Volgens de voorwaarde, opgelegd aan \bar{g} is, als $\|\bar{x}_n\|$ en $\|\bar{x}_{n-1}\|$ beiden kleiner zijn dan r

$$\|\bar{g}(\bar{x}_n, \tau) - \bar{g}(\bar{x}_{n-1}, \tau)\| \leq c \|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\|$$

waarbij c met r naar nul gaat.

Dan is:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq cM \cdot t \cdot \max \|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\|.$$

Als r klein genoeg is, is

$$cMT < 1$$

en de reeks $\sum (\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n)$

convergeert.

De eerste benadering is:

$$\bar{x}_0 = aY.$$

zodat wij voor eindige tijd gevonden hebben, dat bij een oplossing aY van het lineaire systeem een oplossing van het niet-lineaire stelsel behoort, die voor $t=0$ dezelfde beginwaarden heeft, mits deze niet te ver van de oorsprong af gekozen worden. Er is een interval $0 < t < T$ aan te geven, zodat deze oplossing in een bepaalde omgeving van de oorsprong blijft.

De eerste term is dus een benadering van de oplossing van de differentiaalvergelijking.

3. Asymptotisch gedrag; stabiliteit.

Als wij het gedrag van de oplossingen voor oneindig grote t willen onderzoeken, laat het boven bewezen klassieke theorema ons in de steek.

Inderdaad, reeds in het eenvoudige geval, dat

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{g}(\bar{x}, t)$$

waarbij A constant is, is het punt $x=0$ onbereikbaar voor een andere dan de nuloplossing. Immers, de oplossing van het lineaire systeem gedraagt zich als $e^{\lambda t}$ en kan dus niet nul worden, als hij het niet is. Voor het algemene geval, dat A continu is, is hier niets over bekend, wij beperken ons tot speciale gevallen: A is constant of A is een periodieke matrix in t .

Allereerst de definitie van stabiliteit in de zin van Liapounoff: Een baankromme $\bar{x}(t)$ is stabiel t.o.v. een bepaalde familie baankrommen als wij bij elke $\epsilon > 0$ een tijd T en een $\gamma > 0$ kunnen vinden, zodanig, dat als

$$\|\bar{x}_1(0) - \bar{x}(0)\| < \gamma \quad (\bar{x}_1 \text{ uit de familie}) \text{ voor alle } t > T \text{ geldt}$$

$$\|\bar{x}_1(t) - \bar{x}(t)\| < \epsilon.$$

De stabiliteit is asymptotisch, als voor alle krommen \bar{x}_1 uit de familie geldt $\|\bar{x}_1(t) - \bar{x}(t)\| \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$.

Wij bewijzen nu eerst de fundamentele stelling.

Als A een constante matrix is en:

a) Elke oplossing van

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

gaat naar nul als $t \rightarrow \infty$

$$b) \frac{\|\bar{g}(x_1, t)\|}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0 \text{ als } \|\bar{z}\| \rightarrow 0$$

$$c) \|\bar{g}(\bar{x}_1, t) - \bar{g}(\bar{x}_2, t)\| \leq c \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$$

voor alle $\|\bar{x}_1\|$ en $\|\bar{x}_2\| \leq r$ en alle t , waarbij $c \rightarrow 0$ als $r \rightarrow 0$, dan is de nuloplossing $\bar{x}=0$ een stabiele oplossing van

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{g}(\bar{z}, t).$$

Wij zetten het stel differentiaalvergelijkingen weer om in de integraalvergelijking:

$$\bar{x} = \bar{y} + \int_0^t Y(t-\tau) \bar{g}(x, \tau) d\tau.$$

en zetten

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \bar{y} \\ \bar{x}_{n+1} &= \bar{y} + \int_0^t Y(t-\tau) \bar{g}(x_n, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

$$\|\bar{x}_0\| = \|\bar{y}\| = \|Ya\| \leq \|y\| \|a\| \leq M \|a\|.$$

als $a = x(0) = y(0)$.

Dan is

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}\| &\leq \|y\| + \int_0^t \|Y(t-\tau)\| \cdot \|\bar{g}(\bar{x}_n, \tau)\| d\tau \\ &\leq M \|a\| + \epsilon_1 \int_0^t \|Y(t-\tau)\| \cdot \|x_n\| d\tau \end{aligned}$$

als $\|a\|$ klein genoeg is.

Als nu geldt $\|x_n\| < 2M \|a\|$, dan is ook

$$\|x_{n+1}\| < 2M \|a\|,$$

want

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}\| &\leq M \|a\| + \epsilon_1 \cdot 2M \|a\| \cdot \int_0^t \|Y(t-\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq M \|a\| + \epsilon \cdot 2M \|a\| \cdot \int_0^\infty \|Y(t-\tau)\| d\tau \leq 2M \|a\| \end{aligned}$$

als $\|a\|$ en ook ϵ klein genoeg zijn.

Daar voor $n=0$ de ongelijkheid geldt, geldt ze voor alle n .

Beschouw nu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \int_0^t \|Y(t-\tau)\| \cdot \|\bar{g}(\bar{x}_n) - \bar{g}(\bar{x}_{n-1})\| d\tau \leq$$

$$\leq c \cdot \int_0^t \|Y(t-\tau)\| \cdot \|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\| d\tau$$

als $\|x_n\| < r_1 \|x_{n-1}\| < r$

$$\leq \max_{0 < \tau < t} \|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\| \cdot c \cdot \int_0^{\infty} \|Y(t-\tau)\| d\tau.$$

Nu is echter $\int_0^{\infty} \|Y(t-\tau)\| d\tau < M$

en dus is

$$\max \|x_{n+1} - x_n\| \leq cM \max \|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\|.$$

Kiezen wij r dus klein genoeg, dan kunnen wij $cM < 1$ maken en is de convergentie van de reeks bewezen.

De convergentie is zelfs uniform voor $t > 0$ en x_n convergeert naar een functie x , die voldoet aan:

$$\bar{x} = \bar{y} + \int_0^t Y(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau.$$

en dus ook aan de differentiaalvergelijking.

Wij laten nu nog zien, dat deze \bar{x} voor $t \rightarrow \infty$ naar nul gaat.

Daar $\bar{g}(\bar{x}, \tau) \leq \varepsilon \|\bar{x}\|$, is

$$\|\bar{x}\| \leq \|\bar{y}\| + \varepsilon \int_0^t \|Y(t-\tau)\| \cdot \|\bar{x}\| d\tau.$$

Nu gebruiken wij het feit, dat als de oplossingen van de vergelijking met constante coëfficiënten $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$ naar nul gaan, dat ze exponentieel naar nul gaan.

Er is dus een constante $a > 0$, zodat

$$\|\bar{y}\| < c e^{-at}$$

$$\|Y(t-\tau)\| < c e^{-a(t-\tau)}$$

Dan is

$$\|\bar{x} e^{at}\| \leq c + \varepsilon \int_0^t e^{a\tau} \|\bar{x}\| d\tau$$

dus $\|\bar{x} e^{at}\|$ wordt gemajoreerd door de oplossing van

$$u = c + \epsilon \int_0^t u \, d\tau$$

d.w.z.

$$u = c \cdot e^{\epsilon t}$$

Dus

$$\|\bar{x}\| e^{at} \leq c e^{\epsilon t}$$

$$\|\bar{x}\| \leq c \cdot e^{-(a-\epsilon)t}$$

Daar $a > 0$ is, is er een ϵ , zodat $a - \epsilon > 0$ dus $\|\bar{x}\| \rightarrow 0$, en wel exponentieel.

Voor het geval, dat A constant is en niet alle oplossingen van A naar nul gaan, kan men geen stabiliteit verwachten. Wel kan men spreken van voorwaardelijke stabiliteit, d.w.z. niet alle oplossingen binnen een zekere omgeving van de nul-oplossing gaan naar nul, maar er is een varieteit van beginpunten, waar de baankrommen, die daar beginnen, naar nul gaan.

Dit wordt uitgedrukt in de

Stelling:

a) Als k karakteristieke wortels van A negatieve reële delen hebben, waarbij $k \leq n$

b) $\frac{\|\bar{g}(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0$ als $\|\bar{x}\| \rightarrow 0$

c) $\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq c \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$

voor $\|x_1\| < r$, $\|x_2\| < r$, waarbij $c \rightarrow 0$ met $r \rightarrow 0$, dan is er een k -parameter varieteit om de oorsprong, zodanig, dat iedere oplossing \bar{x} van de vergelijking

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{g}(\bar{x}, t),$$

welks beginwaarden op deze varieteit liggen, naar nul gaat.

Om dit te bewijzen, beschouwen wij weer de integraalvergelijking

$$\bar{x} = \bar{y} + \int_0^t Y(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) \, d\tau.$$

Om de oplossingen van de lineaire vergelijking, die naar ∞ gaan te elimineren, splitsen wij Y op in de som van twee matrices

$$Y = Y_1 + Y_2$$

waarbij $Y_1 = (u_{ij})$, $Y_2 = (v_{ij})$ en u_{ij} is het deel van y_{ij} , dat naar nul gaat en v_{ij} het deel, dat niet naar nul gaat.

Dan geldt ook

$$\frac{dY_1}{dt} = AY_1, \quad \frac{dY_2}{dt} = AY_2.$$

en wij schrijven (formeel)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{y} + \int_0^t Y_1(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau + \int_0^t Y_2(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau = \\ &= \bar{y} + \int_0^t Y_1(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau - \int_t^\infty Y_2(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau + \\ &\quad + \int_0^\infty Y_2(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Merk op, dat de laatste integraal, als zij bestaat, een oplossing is van de lineaire vergelijking.

Wij kunnen hem dus samen nemen met \bar{y} en de vergelijking

$$\bar{x} = \bar{y} + \int_0^t Y_1(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau - \int_t^\infty Y_2(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau$$

beschouwen, waarbij \bar{y} een speciale oplossing van het lineaire systeem is.

Kies nu voor \bar{y} een oplossing uit het k -parameter systeem, dat naar nul gaat voor $t \rightarrow 0$ en laat $\|\bar{y}(0)\|$ klein zijn. Er is een $\alpha > 0$, zodanig, dat $\|y\| < b e^{-\alpha t}$ voor $t \geq 0$. Verder is er een $\alpha_1 > \alpha$, zodat $\|Y_1(t)\| \leq d_1 e^{-\alpha_1 t}$ en een α_2 , zodat $\|Y_2(t)\| \leq d_2 e^{\alpha_2 t}$.

Neem nu weer

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \bar{y} \\ \bar{x}_{n+1} &= \bar{y} + \int_0^t Y_1(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau - \int_t^\infty Y_2(t-\tau) \bar{g}(\bar{x}, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Nu is $\|\bar{x}_0\| \leq b e^{-\alpha t}$, wij laten nu zien dat

$$\|\bar{x}_n\| \leq 2b e^{-\alpha t}$$

Immers:

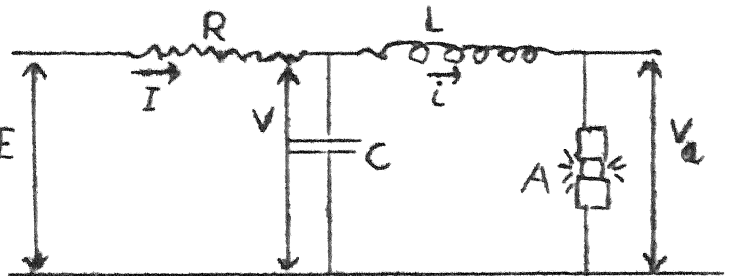
$$\|\bar{x}_{n+1}\| \leq b e^{-\alpha t} + 2bd_1 \int_0^t e^{-a_1(t-\tau)} e^{-\alpha \tau} d\tau + 2bd_2 \int_t^\infty e^{\alpha_2(t-\tau)} e^{-\alpha \tau} d\tau$$

en voor voldoende kleine ε is dit $\leq 2b e^{-\alpha t}$.

2 maart 1956

Toepassingen van de stelling van Liapounoff.1) Het evenwicht van een electrisch circuit met een niet-lineair element.

Wij beschouwen het nevenstaande circuit, waar bij A een electrische lichtboog aanwezig is. De karakteristiek van deze boog, d.w.z. het verband tussen potentiaal en stroomsterkte wordt gegeven door nevenstaande grafiek.



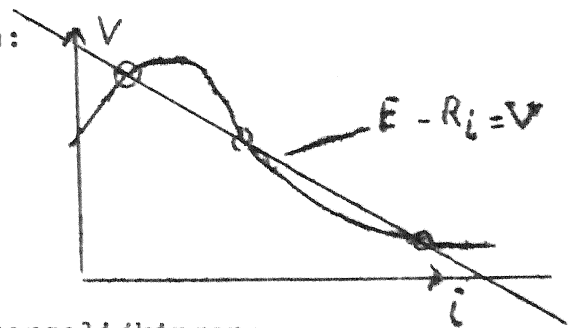
$$V = \psi(i).$$

De vergelijkingen voor het circuit zijn:

$$V = L \frac{di}{dt} + \psi(i)$$

$$E = RI + V$$

$$I = i + c \frac{dV}{dt}$$



Eliminatie van I geeft voor i en V de vergelijkingen:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{E - V - Ri}{RC} \\ \frac{di}{dt} = \frac{V - \psi(i)}{L} \end{cases}$$

Voor het evenwicht is

$$V_0 = E - Ri_0$$

$$V_0 = \psi(i_0).$$

Bij de aangegeven vorm van de karakteristiek treden dus of één of drie evenwichtspunten op.

Wij stellen nu:

$$i = i_0 + j, \quad V = V_0 + v.$$

Wij schrijven de vergelijkingen in de eerste orde benadering

$$\psi(i) = \psi(i_0) + j \frac{d\psi}{di_0}$$

Dan wordt het gelineariseerde systeem

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{RC} - \frac{j}{c} \\ \frac{dj}{dt} = \frac{v}{L} - j \frac{1}{L} \frac{d\Psi}{dt_0} \end{cases}$$

Wij introduceren dimensieloze grootheden:

$$\xi = \frac{v}{E}; \quad \eta = \frac{jR}{E}$$

en meten de tijd met de tijdconstante RC.

$$t = RC \tau.$$

Dan wordt het systeem:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -\xi - \eta \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \alpha(\xi - \rho\eta) \end{aligned}$$

waarbij $\alpha = \frac{R^2 C}{L}$; $\rho = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Psi}{dt_0}$.

Hierbij is α steeds positief, maar ρ kan positief of negatief uitvallen al naar het punt in de grafiek.

De karakteristieke vergelijking is:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ \alpha & -\alpha\rho-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^2 + (1 + \alpha\rho)\lambda + \alpha(\rho + 1) = 0.$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{1+\alpha\rho}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1+\alpha\rho)^2 - 4\alpha(\rho+1)}.$$

Wij kunnen dus de wortels classificeren in een (α, ρ) diagram.

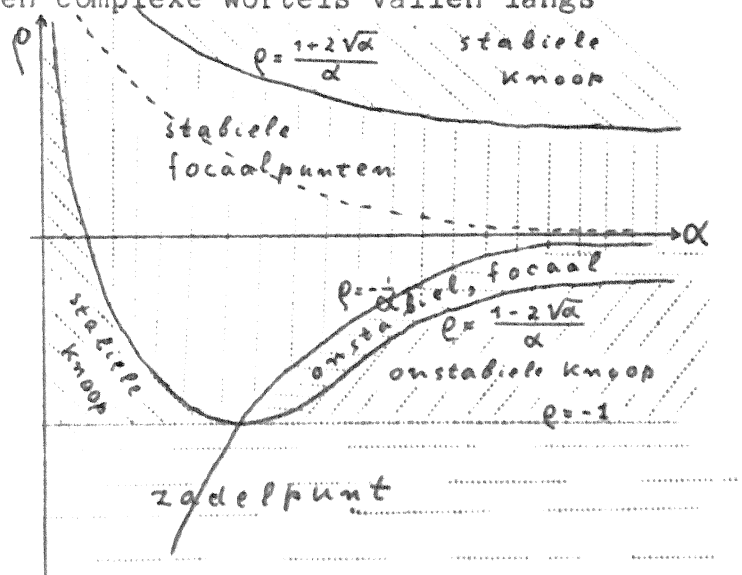
De scheidingslijnen tussen reële en complexe wortels vallen langs

$$\begin{aligned} (1 - \alpha\rho)^2 &= 4\alpha \\ 1 - \alpha\rho &= \pm 2\sqrt{\alpha} \\ \rho &= \frac{1 \pm 2\sqrt{\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \pm \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned}$$

Binnen deze lijnen zijn de evenwichtspunten focaalpunten.

Om de stabiliteit te onderzoeken, beschouwen wij het reële deel:

$$\alpha\rho + 1 = 0.$$



Buiten de lijnen zijn de wortels reëel. Het product is positief, $\rho > -1$, daar zijn dus de knooppunten.

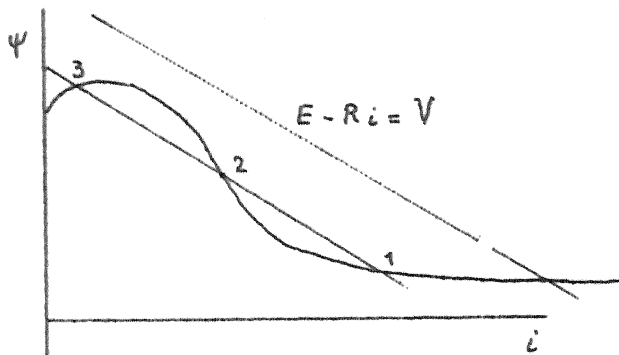
Voor $\rho < -1$ is het evenwichtspunt een zadelpunt.

Voor $\alpha \rho < -1$, dus $\rho < -1/\alpha$ ontstaat dus een instabiel evenwichtspunt, voor $\rho < -1$ een zadelpunt.

Wij beschouwen nu het gedrag van de drie of een snijpunten van de lijn $E - Ri = V$ met de karakteristiek.

In 1 is steeds

$$\left| \frac{1}{R} \frac{d\psi}{di} \right| < 1$$



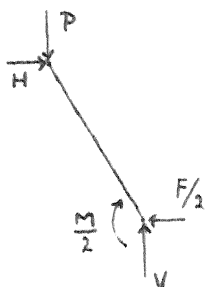
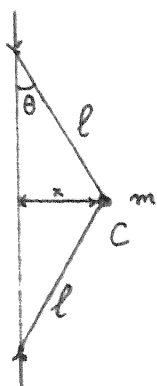
en het evenwicht is stabiel als ook nog $\rho = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\psi}{di} > -\frac{1}{\alpha}$.

In punt 2 is $\rho = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\psi}{di} < -1$, dus is 2 steeds een zadelpunt.

Daarentegen is 3 steeds een stabiel punt, want $\rho > 0$.

2) Elastische stabiliteit van een gedrukte kolom.

Wij beschouwen hier het sterk geschematiseerde geval van een kolom, bestaande uit twee staven, die in een scharnier door een veer worden vastgehouden, en een massa m in dat scharnier dragen. Veren in C met



veerkracht $f(x)$ en een spiraalveer (die de buigstijfheid nabootst) werken de uitwijking tegen.

Het evenwicht geeft dan

$$P = V$$

$$-\frac{M}{2} + V l \sin \theta - \frac{Fl}{2} \cos \theta = 0;$$

$M = 2k \theta$ en de bewegingsvergelij-

king van de massa m is $m\ddot{x} = F - f(x)$.

Neem aan, dat $f(x) = \alpha x + \beta x^3$, dan wordt de vergelijking

$$m\ddot{x} - 2 \frac{Px - k \arcsin x/l}{\sqrt{1-x^2}} + (\alpha x + \beta x^3) = 0.$$

Nemen wij alleen derde machten van x mee, dan krijgen wij

$$m\ddot{x} + \left(\alpha + \frac{2k}{l^2} - \frac{2P}{l} \right) x + \left(\beta + \frac{4k}{3l^4} - \frac{P}{l^3} \right) x^3 = 0.$$

Stel even

$$a_1 = \alpha + \frac{2k}{l^2} - \frac{P}{l}$$

$$a_2 = \beta + \frac{4k}{3l^4} - \frac{P}{l^3}$$

dan wordt het evenwicht gegeven door:

$$\left(\alpha + \frac{2k}{l^2} - \frac{2P}{l}\right) x + \left(\beta + \frac{4k}{3l^4} - \frac{P}{l^3}\right) x^3 = 0.$$

Verwaarlozen wij, zoals in de lineaire elasticiteitstheorie gebruikelijk is, de derdegraadsterm, dan krijgen wij:

$$\alpha + \frac{2k}{l^2} - \frac{2P}{l} = 0.$$

$$P = \frac{\alpha l}{2} + \frac{k}{l}.$$

als kritieke kniklast.

Wij beschouwen nu het dynamische probleem.

$$\dot{x} = v.$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha}{m} \cdot \frac{-a_1 x - a_2 x^3}{1} \\ \frac{dx}{dt} = v. \end{cases}$$

Het evenwicht wordt gegeven door

$$\begin{cases} v = 0. \\ -a_1 x - a_2 x^3 = 0 \end{cases}$$

dus $v = 0, x = 0$ of $v=0, x = \pm \sqrt{\frac{-a_1}{a_2}}$

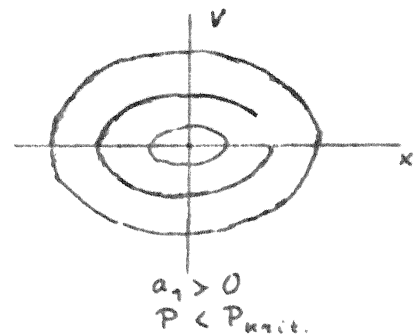
De benaderde vergelijkingen zijn in het eerste geval:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{a_1}{m} x \\ \frac{dx}{dt} = v. \end{cases}$$

de wortels worden gevonden uit:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{a_1}{m} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

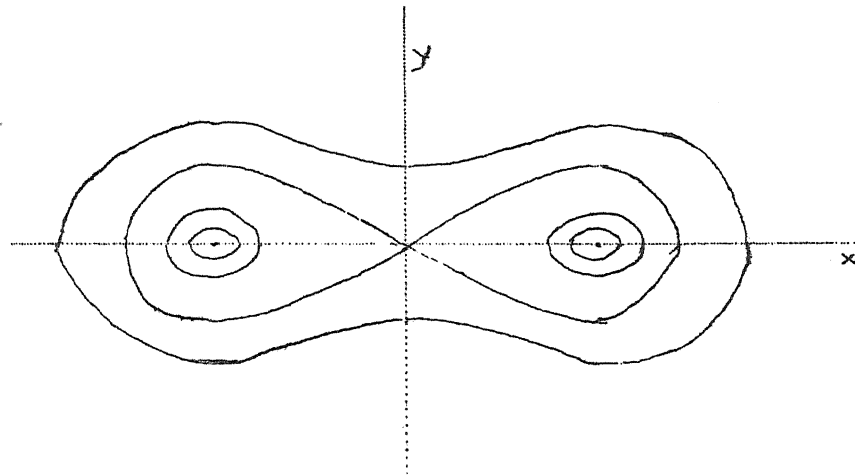
$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-a_1}{m}}.$$



Is $a_1 > 0$, dan zijn beide wortels zuiver imaginair, wij hebben een centrum, een kleine verstoring van het evenwicht geeft een harmonische trilling, is $a_1 < 0$, dan ontstaat een zadelpunt, het evenwicht is instabiel. Wij beschouwen nu het geval, dat $a_1 < 0$ maar $a_2 > 0$. In dit geval

zijn er drie evenwichtspunten.

De twee anderen blijken dan centra te zijn.



De methode, die Lighthill aangeeft, bestaat hierin om in plaats van x een nieuwe onafhankelijke variabele t in te voeren, die nog nader gespecificeerd kan worden en dan zowel u als x als reeksen in ϵ te schrijven met coëfficiënten, die functies zijn van t .

$$x = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

$$u = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots$$

Substitutie geeft dan het volgende systeem:

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots)(u'_0 + \varepsilon u'_1 + \varepsilon^2 u'_2 + \dots) =$$

$$= -[(q + \varepsilon x_1 q' + \varepsilon^2 x_2 q' + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x_1^2 q'' + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) -$$

$$- (r + \varepsilon x_1 r' + \varepsilon^2 x_2 r' + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x_1^2 r'' + \dots)] [x'_0 + \varepsilon x'_1 + \varepsilon^2 x'_2 + \dots] .$$

waaruit volgt:

$$x_0 u'_0 + q u_0 = -r x'_0$$

$$x_0 u'_1 + x'_0 q u_1 = -x_1 u'_0 - [x_1 u_0 q' x'_0 + r' x_1 x'_0 - q u_0 x'_1 + r x'_1] - u_0 u'_0 - x_1 u'_0$$

.

.

Omdat voor x groot de gelineariseerde vergelijking een goede benadering geeft, kiezen wij $x_0(t) = t$.

Dan wordt de eerste vergelijking

$$t u'_0 + q u_0 = r .$$

De oplossing van de homogene vergelijking

$$t v' + q v = 0$$

is
$$v = -v_0 \cdot \exp \int \frac{q}{t} dt$$

en die van de niet homogene vergelijking wordt gevonden uit

$$\frac{d}{dt}(u_0 \cdot \exp \int \frac{q}{t} dt) = \frac{r}{t} \cdot \exp \int \frac{q}{t} dt .$$

Wij veronderstellen, dat q en r regulier zijn in een omgeving van $x = 0$, dus ook van $t = 0$.

$$q = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots$$

$$r = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \dots$$

Dan vinden wij, dat in een omgeving van $t = 0$

$$u_0 = R + O(t^{-q_0})$$

waarbij hier en in het volgende R een reguliere functie in t aanduidt. Hierbij is q_0 een niet-negatief geheel getal; in dit laatste geval treden logarithmische termen op.

Uit de tweede vergelijking vinden wij op soortgelijke wijze

$$\frac{d}{dt}(u_1 \exp \int \frac{q}{t} dt) = \frac{1}{t} \cdot \exp \int \frac{q}{t} dt \cdot [(r - qu_0)x_1' + (r' - q'u_0)x_1x_0' - u_0u_0' - x_1x_0']$$

Als $x_1 = 0$, wordt $x = t$ en wij vinden

$$u_1 = R + O(t^{-q_0-1}) + O(t^{-2q_0-1}).$$

Als wij nu in de reeks voor u de verhouding van opvolgende termen beschouwen, dan wordt deze

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\varepsilon t^{-2q_0-1}}{t^{-q_0}} = \varepsilon t^{-1-q_0}.$$

De convergentiestraal in ε is dus $O(t^{1+q_0})$ en gaat voor $q_0 < 0$ naar nul toe met t .

Is $q_0 > 0$ dan is de term t^{-q_0-1} erger dan t^{-2q_0-1} , maar in u_2 geeft zij een term t^{-q_0-2} , zodat ook hier negatieve machten van t verdwijnen.

Als u_1 een zelfde type singulariteit moet hebben als u_0 , dan moeten wij x_1 zo kiezen, dat de factor

$$[(r - qu_0)x_1' + (r' - qu_0 - u_0')x_1 - u_0u_0']$$

de vorm $R + O(t^{-q_0+1})$ heeft.

Neem eerst $q_0 > 0$.

Als $u_0 \sim At^{-q_0}$, dan wordt x_1 bepaald door:

$$(-q_0 At^{-q_0} t \dots)x_1' + (+q_0 At^{-q_0-1} + \dots)x_1 = -A^2 q_0 t^{-2q_0-1} \dots$$

dus

$$x_1 \sim -\frac{At^{-q_0}}{q_0 + 1}.$$

Door volledige inductie bewijst men, dat

$$x_j = O(t^{-jq_0}).$$

Wij vinden dus:

$$x = t + \varepsilon \left(-\frac{At^{-q_0}}{q_0 + 1} + \dots \right) + \varepsilon^2 O(t^{-2q_0}) + \varepsilon^3 O(t^{-3q_0}) + \dots$$

De convergentiestraal ρ in de machtreeks naar ε is dus $O(t^{q_0})$ in de omgeving van $t = 0$.

Dit is zeer belangrijk, want in het punt $x = 0$ is de reeks nu convergent. Immers $x = 0$ correspondeert met

$$t = B\varepsilon \frac{1}{1+q_0}$$

en dus is $\rho \sim t^{q_0} \sim \varepsilon^{\frac{q_0}{1+q_0}} > \varepsilon$.

De eerste benadering is dus nu:

$$u = u_0(t)$$

waarbij t de wortel is van de vergelijking

$$x = t - \frac{\varepsilon A t^{-q_0}}{q_0 + 1}$$

die voor $t \gg 0$ in x overgaat.

Hierbij komen wij van positieve waarden van x . Er is een vertak-
kingspunt als $\frac{dx}{dt} = 0$ of

$$1 + \frac{q_0 \varepsilon A t^{-q_0-1}}{q_0 + 1} = 0.$$

$$t = \left(- \frac{\varepsilon A q_0}{q_0 + 1} \right)^{\frac{1}{q_0+1}}$$

en voor positieve q_0 ligt dit niet op de positieve as.

Indien q_0 negatief is, is de analyse minder volledig.

Neem eerst $q_0 \leq -1$, dan speelt in u_1 alleen de term z^{-q_0-1} een rol.

Het blijkt, dat men in dit geval de $x_j(t)$ constant kan kiezen, zodat de reeks voor u uniform convergent is in een α cirkel voor alle $z \geq 0$.

Dit kan direct bewezen worden door te stellen $x = t + \alpha$, $u = v + \beta$, zodat in de vergelijking voor v zowel de coëfficiënt $\frac{dv}{dt}$ als de bekende term nul zijn voor $v = t = 0$:

$$\left\{ t + \alpha + \varepsilon(v + \beta) \right\} \frac{dv}{dt} + q(t + \alpha) \cdot (v + \beta) = r(t + \alpha).$$

dus

$$\alpha + \beta \varepsilon = 0, \quad \beta q(\alpha) = r(\alpha).$$

α en β kunnen in een reeks naar ε ontwikkeld worden.

In de nieuwe vergelijking:

$$(t + \varepsilon v) \frac{dv}{dt} + q(t) \cdot v = r(t); \quad r_0 = 0.$$

kunnen wij een uniform convergente machtreeks in ε krijgen:

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots$$

Allereerst is:

$$v_0(t) = e^{-\int \frac{q}{t} dt} \int \frac{r}{t} e^{\int \frac{q}{t} dt} \cdot dt = tR + O(t^{-q_0} \log^\mu t)$$

waarbij $\mu = 1$ als q_0 geheel is.

Verder geldt:

$$\frac{d}{dt} (v_j e^{\int \frac{q}{t} dt}) = - \frac{1}{t} e^{\int \frac{q}{t} dt} [v_0 v_{j-1}' + v_1 v_{j-2}' + \dots + v_{j-1} v_0']$$

Door volledige inductie bewijzen wij, dat

$$v_j = tR + O(t^{-q_0} \log^{\nu_j + \mu} t).$$

Elke v_j is begrensd als $t \rightarrow 0$ en de convergentie is waarschijnlijk wel uniform in t . Iedere oplossing heeft echter een gecompliceerde

singulariteit van $t = 0$, dus $x = \alpha$. Dit lijkt echter niet juist, want de singuliere delen in de reeks $\sum \epsilon^j v_j$ leveren factoren van de orde $\log^\nu z$.

Het ziet er dus naar uit, dat de convergentiestraal in ϵ de vorm $|\log t|^{-\nu}$ heeft, waarbij $\nu = 2$ voor $q_0 = -1$ en $\nu = 1$ voor andere q_0 . Er kan dus een singulariteit optreden vlak bij $t = 0$, zijn afstand moet zijn $O(e^{-\text{const.} \alpha^{-1/\nu}})$.

Als voorbeeld geeft Lighthill de vergelijking

$$(z + \epsilon v) \frac{dv}{dz} - v = 0$$

met randvoorwaarde $v(1) = 1$.

De oplossing is

$$z = v(1 + \epsilon \log v)$$

en het vertakkingspunt is gegeven door $\frac{dz}{dv} = 0$.

$$0 = 1 + \epsilon \log v + \epsilon$$

$$v = e^{-\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}$$

$$z = e^{-1-\frac{1}{\epsilon}} \left(1 - \epsilon \frac{1+\epsilon}{\epsilon}\right) = -e^{-1-\frac{1}{\epsilon}}$$

Samenhang met de theorie van de singuliere punten

Wij schrijven de vergelijking

$$(x + \epsilon u) \frac{du}{dx} + q(x)u = r(x)$$

in de vorm

$$\frac{du}{dt} = r - qu = r_0 + r_1 x + \dots - (q_0 + q_1 x + \dots)u$$

$$\frac{dx}{dt} = x + \epsilon u.$$

Het singuliere punt is gegeven door

$$x + \epsilon u = 0$$

$$r - qu = 0$$

of wel in eerste benadering

$$x = -\frac{\epsilon r_0}{q_0 + r_1 \epsilon}; \quad u = \frac{r_0}{q_0 + r_1 \epsilon}.$$

$$\text{Stel } u = \frac{r_0}{q_0 + r_1 \epsilon} + \eta; \quad x = -\frac{\epsilon r_0}{q_0 + r_1 \epsilon} + \xi,$$

dan wordt het gelineariseerde benaderende stelsel:

$$\frac{d\eta}{dt} = r_1 \xi - q_0 \eta.$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi + \epsilon \eta.$$

De eigenwaarden van het systeem worden gevonden uit

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & \varepsilon \\ r_1 & -q_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

$$(1 - \lambda)(q_0 + \lambda) + \varepsilon r_1 = 0 .$$

$$-\lambda^2 + (1 - q_0)\lambda + q_0 + \varepsilon r_1 = 0 .$$

$$\lambda = \frac{1 - q_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + q_0}{2}\right)^2 + \varepsilon r_1} .$$

$$\lambda_1 \sim 1 + \frac{\varepsilon r_1}{1 + q_0} .$$

$$\lambda_2 \sim -q_0 - \frac{\varepsilon r_1}{1 + q_0} .$$

De bijbehorende eigenvectoren zijn

$$\begin{aligned} \xi_1 &= q_0 + 1 & \xi_2 &= \varepsilon \\ \eta_1 &= r_1 & \eta_2 &= -(1 + q_0) . \end{aligned}$$

De oplossingen van de vergelijking zijn dus:

$$\xi = A(q_0 + 1)e^{\frac{\varepsilon r_1}{1 + q_0} \tau} + B \varepsilon . e^{-q_0 \tau}$$

$$\eta = A r_1 e^{\tau} - B(1 + q_0) e^{-q_0 \tau} .$$

Stellen wij $e^{\tau} = t$, dan wordt dit

$$\begin{cases} \xi = A(q_0 + 1) \cdot t^{1 + \frac{\varepsilon r_1}{1 + q_0}} + B \varepsilon \cdot t^{-q_0} . \\ \eta = A r_1 t^{1 + \frac{\varepsilon r_1}{1 + q_0}} - B(1 + q_0) t^{-q_0} . \end{cases}$$

Indien voor grote t $\xi \approx t$ moet worden, moet $A = \frac{1}{q_0 + 1}$, dus

$$\begin{aligned} \xi &= t \left\{ 1 + \frac{\varepsilon r_1}{1 + q_0} \log t \right\} + B \varepsilon \cdot t^{-q_0} \\ \eta &= \frac{r_1}{1 + q_0} \cdot t \left\{ 1 + \frac{\varepsilon r_1}{1 + q_0} \log t \right\} - B(1 + q_0) t^{-q_0} , \end{aligned}$$

dus

$$x = t + \varepsilon \left[\frac{r_1}{1 + q_0} t \log t + B t^{-q_0} - \frac{r_0}{q_0} \right] .$$

Is $q_0 > 0$, dan is voor $x = 0$

$$t + \varepsilon B t^{-q_0} = 0 .$$

$$t = (-\varepsilon B)^{\frac{1}{q_0 + 1}} .$$

dus

$$u = \frac{r_0}{q_0} - B(1+q_0) \cdot t^{-q_0} + \frac{r_1}{1+q_0} t + o(\varepsilon) \dots$$

Uit de algemene stelling van Liapounoff voor analytische functies volgt, dat de oplossingen van de complete vergelijking ontwikkeld kunnen worden in machtreeksen naar t (met log-termen) in de omgeving van $t = 0$.

$$\xi = t^{1+\frac{\varepsilon r_1}{1+q_0}} \left\{ \sum_{\nu} a_{\nu}^{(1)} t^{\nu} \right\} + B \varepsilon t^{-q_0 - \frac{\varepsilon r_1}{1+q_0}} \left\{ \sum_{\nu} b_{\nu}^{(1)} t^{\nu} \right\},$$

$$\eta = \frac{r_1}{1+q_0} \cdot t^{1+\frac{\varepsilon r_1}{1+q_0}} \left\{ \sum_{\nu} a_{\nu}^{(2)} t^{\nu} \right\} - B(1+q_0) t^{-q_0 - \frac{\varepsilon r_1}{1+q_0}} \left\{ \sum_{\nu} b_{\nu}^{(2)} t^{\nu} \right\}.$$

De hoogste singulariteit, die optreedt, is de term $t^{-q_0 - \frac{\varepsilon r_1}{1+q_0}}$, zodat het bezwaar, dat Lighthill door zijn methode opheft, al direct is verdwenen. Hogere benaderingen in ε kunnen direct gevonden worden door het singuliere punt beter te benaderen. De parameter t , die hier op een natuurlijke wijze te voorschijn komt, is in eerste benadering identiek met de t van Lighthill.

Voor $q_0 < 0$ gaan de beschouwingen onverminderd door, alleen is dan in de omgeving van $x = 0 : t = o(\varepsilon)$.

Colloquium

Methoden der Mathematische Physica

o.l.v. Prof. Dr R. Timman

Onderwerp: Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

13 april 1956

Toepassing van de methode van Lighthill.

Wij illustreren de methode van Lighthill aan de eenvoudige vergelijking:

$$(x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + y = 1.$$

Wij substitueren eerst

$$y = y_0(x) + y_1(x) + \dots,$$

en krijgen dan het systeem

$$\begin{aligned} x \frac{dy_0}{dx} + y_0 &= 1 \\ xy_1' + y_1 &= -y_0 y_0' \\ &\dots \end{aligned}$$

met als oplossingen:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + \frac{C_0}{x} \\ y_0' &= -\frac{C_0}{x^2} \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$y_1 = \frac{C_1}{x} - \frac{C_0}{x^2} - \frac{C_0^2}{2x^3}.$$

In het bijzonder wordt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_1}{y_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{C_1}{x} - \frac{C_0}{x^2} - \frac{C_0^2}{2x^3}}{1 + \frac{C_0}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{C_0}{2x^2},$$

zodat de verhouding y_1/y_0 naar oneindig gaat met afnemende x . Wij kunnen dus nooit een uniform convergente reeks in x krijgen.

Met Lighthill voeren wij in:

$$\begin{aligned} y &= y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots \\ x &= t + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \end{aligned}$$

zodat de vergelijking

$$(x + \varepsilon y) dy + (y - 1) dx = 0$$

na ontwikkeling geeft

$$(t + \varepsilon y_0 + \varepsilon x_1 + \dots)(y_0' + \varepsilon y_1' \dots) + (y_0 - 1 + \varepsilon y_1 \dots)(1 + \varepsilon x_1' \dots) = 0.$$

$$ty_0' + y_0 - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad y_0 = 1 + \frac{c_0}{t}.$$

$$\begin{aligned} ty_1' + y_1 &= -y_0 y_0' - x_1 y_0' - y_0 x_1' + x_1' = \\ &= \frac{c_0}{t^2} + \frac{c_0^2}{t^3} + x_1 \frac{c_0}{t^2} - \frac{c_0}{t} \cdot x_1'. \end{aligned}$$

De algemene oplossing van de vergelijking

$$ty_1' + y_1 = t^{-m}$$

wordt voor $m \neq 1$

$$y_1 = -\frac{t^{-m}}{m-1} + \frac{C}{t},$$

voor $m=1$ $y = \frac{\log t}{t} + \frac{C}{t}.$

Indien dus de verhouding $\frac{y_1}{y_0}$ eindig moet blijven, moet x_1 zo worden gekozen, dat zowel de term met $y_0 t^{-3}$ als t^{-2} in het rechterlid wegvalt.

Stel daartoe $x_1 = \alpha + \frac{\beta}{t}$, $x_1' = -\frac{\beta}{t^2}.$

$$\begin{aligned} \text{Dan wordt: } \frac{c_0}{t^2} + \frac{c_0^2}{t^3} + \frac{c_0}{t^2} \left(\alpha + \frac{\beta}{t} \right) + \frac{c_0 \beta}{t^3} &= \\ &= \frac{c_0}{t^2} (1 + \alpha) + \frac{c_0}{t^3} [c_0 + 2\beta] \end{aligned}$$

dus $\alpha = -1, \beta = -\frac{c_0}{2}.$

Wij beschouwen nu het gedrag in de omgeving van het singuliere punt van de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{x+\varepsilon y}.$$

Het singuliere punt wordt bepaald uit:

$$\begin{cases} 1 - y = 0 \\ x + \varepsilon y = 0 \end{cases}$$

dus $x = -\varepsilon, y=1.$

Stel dus $y-1=u, x+\varepsilon=v$

dan wordt het stelsel:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u \\ \frac{dv}{dt} = v + \varepsilon u, \end{cases}$$

met de oplossingen:

$$\begin{cases} u = Ae^{-t} \\ v = Ce^t - \frac{\varepsilon}{2} Ae^{-t} \end{cases}$$

of wel met $\tau = e^t$

$$\begin{cases} y = 1 + A/\tau \\ x = -\xi - \frac{\xi A}{2\tau} + \tau \end{cases},$$

zodat voor kleine ξ en grote τ $x \approx \tau$.

Dit resultaat is in overeenstemming met het vroegere. Wij kunnen het resultaat ook direct interpreteren. In het x - y vlak worden de baankrommen gegeven door de hyperbolen

$$(y-1)\left(x+\xi+\frac{\xi}{2}(y-1)\right) = A$$

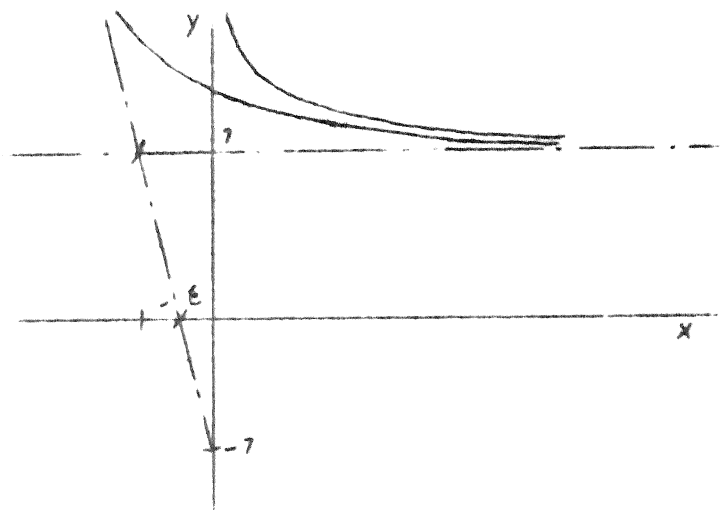
met middelpunten $x = -\xi$, $y = 1$.

De asymptoten zijn $y = 1$,

$x + \frac{1}{2}\xi y = -\frac{1}{2}\xi$. De tweede asymptoot gaat voor $\xi \rightarrow 0$ over in de y as en de baankrommen worden

$$(y-1)x = A.$$

Het is duidelijk, dat voor $x \gg \xi$ de hyperbolen allen vrijwel samenvallen, maar voor $x = 0$ neemt de laatste hyperbool een uitzonderingspositie in.



Het snijpunt met de y as wordt gegeven door $x = 0$, $y = \sqrt{\frac{2A}{\xi}} + 1$.

Dit wordt door de tweede benadering in de zin van Lighthill (die hier exact is) weergegeven.

Voor vergelijkingen van de tweede orde gaat de methode van Lighthill, die zeer algemeen is, onverminderd door.

Als voorbeeld neemt hij:

$$(x + \xi \frac{dv}{dx} + \xi av) \frac{d^2 v}{dx^2} + q \frac{dv}{dx} + sv = v.$$

Wij schrijven $\frac{dv}{dx} = u$ en stellen:

$$\begin{cases} u = u_0 + \xi u_1 + \xi^2 u_2 + \dots \\ v = v_0 + \xi v_1 + \xi^2 v_2 + \dots \\ x = x_0 + \xi x_1 + \xi^2 x_2 + \dots \end{cases}.$$

De verdere ontwikkeling verloopt volkomen analoog met het voorafgaande.

Volgens Lighthill is hier echter een behandeling uitgaande van het singuliere punt niet uit te voeren. Dit zullen wij nader onderzoeken.

Wij hebben het stel vergelijkingen:

$$\frac{du}{dx} = \frac{r - qu - sv}{x + \xi u + \xi av}$$

$$\frac{dv}{dx} = u$$

of wel

$$\frac{du}{d\tau} = r - qu - sv,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = x + \varepsilon u + \varepsilon a v,$$

$$\frac{dv}{d\tau} = u(x + \varepsilon u + \varepsilon a v),$$

en zoeken weer het singuliere punt.

Hier is echter een lijn van singuliere punten, in de x, u, v ruimte:

$$\begin{cases} x + \varepsilon u + \varepsilon a v = 0 \\ r - qu - sv = 0, \end{cases}$$

waar het punt $u=0$ een uitzonderingspunt vormt.

Wij beschouwen nu de ontwikkeling in de omgeving van dat punt, dat gegeven wordt door

$$r - sv = 0, \quad x + \varepsilon a v = 0,$$

met als oplossingen

$$x = -\varepsilon a v$$

$$r_0 + r_1 x + \dots - v(s_0 + s_1 x + \dots) = 0.$$

Hieruit kunnen x_0 en v_0 in een machtreeks naar ε worden ontwikkeld.

$$r_0 - v_0 s_0 = 0. \quad v = r_0/s_0 + \dots, \quad x = -\varepsilon \frac{a r_0}{s_0} + \dots$$

Wij nemen weer de eerste orde benadering

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = r'(0)(x-x_0) - q(0)u - s(0)(v-v_0) \\ \frac{dx}{d\tau} = (x-x_0) + \varepsilon u + \varepsilon a(v-v_0) \\ \frac{dv}{d\tau} = 0, \end{cases}$$

en stellen $x-x_0 = \xi$, $v-v_0 = \eta$
zodat het stelsel wordt:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \xi + \varepsilon u + \varepsilon a \cdot \eta \\ \frac{d\xi}{d\tau} = r'(0) \cdot \xi - q(0) \cdot u - s(0) \cdot \eta \\ \frac{d\eta}{d\tau} = 0. \end{cases}$$

De karakteristieke exponenten worden gegeven door

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \varepsilon & \varepsilon a \\ r'(0) & -q(0)-\lambda & -s(0) \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

of wel

$$\lambda [\lambda^2 - (1-q)\lambda - q - \varepsilon r'(0)] = 0$$

met $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 1 + \frac{\varepsilon r'(0)}{1+q}$ $\lambda_2 = -q(0) - \frac{\varepsilon r'(0)}{1+q}$.

De bijbehorende oplossingen van het stelsel zijn

$$u = A \left(\frac{s(0) + \varepsilon r'(0)}{q(0) + \varepsilon r'(0)} \right) = B r'(0) e^{\tau} + C (1+q) e^{-q_0 \tau}$$

$$\xi = -A \varepsilon (a+u) - B (1+q) e^{\tau} - C \varepsilon e^{-q_0 \tau}$$

$$\eta = \begin{matrix} A & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\lambda = \begin{matrix} 0 & 1+0(\varepsilon) & -q(0)+0(\varepsilon) \end{matrix}$$

Stel weer $e^{\tau} = t$, dan zal voor grote t $x \sim t$ worden als $B = \frac{1}{1+q}$.
Verder loopt de discussie vrijwel gelijk aan die in het vorige geval.

Periodieke oplossingen, Cycles limites.

Wij hebben gezien, dat bij conservatieve systemen periodieke oplossingen bestaan om een evenwichtspunt heen. Er zijn echter ook andere mogelijkheden, die wij eerst aan enige voorbeelden demonstreren.

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{dx}{dt} &= y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \{1-(x^2+y^2)\} \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \{1-(x^2+y^2)\}. \end{aligned}$$

In poolcoördinaten

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta$$

worden deze vergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{x}{r}(1-r^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{y}{r}(1-r^2).$$

Hieruit leiden wij af met $x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}$

$$\frac{dr}{dt} = 1 - r^2,$$

en met $(y\dot{x} - x\dot{y}) = r^2 \dot{\theta}$.

$$\dot{\theta} = 1.$$

Verder levert integratie

$$dt = \frac{dr}{1-r^2}$$

dus

$$2(t-t_0) = \log \frac{1+r}{1-r},$$

en

$$\frac{1+r}{1-r} = A \cdot e^{2t}$$

zodat

$$r = \frac{Ae^{2t}-1}{Ae^{2t}+1}.$$

Als $t \rightarrow \infty$ gaat $r \rightarrow 1$, onverschillig of nu $t=0$ $r > 1$ of $r < 1$ is. Daar de hoeksnelheid van de voerstraal constant is, betekent dit, dat het punt een spiraalvormige baan beschrijft, die zich steeds nauwer aansluit aan de cirkel $r=1$. Een dergelijke kromme, die als limietkromme kan worden beschouwd, waar de baankrommen voor grote t onbepaald toe naderen, is een "cycle limite". Deze "cycle limite" is stabiel, immers vanaf beide zijden naderen de baankrommen tot het punt.

Indien $r_0=0$ is, kan A niet bepaald worden. Het punt $r=0$ is een evenwichtspunt voor de oorspronkelijke vergelijkingen. Het evenwicht is instabiel, d.w.z. zodra het punt even uit het evenwichtspunt is verwijderd, wordt $\frac{dr}{dt} > 0$ en het zal zich er verder van verwijderen.

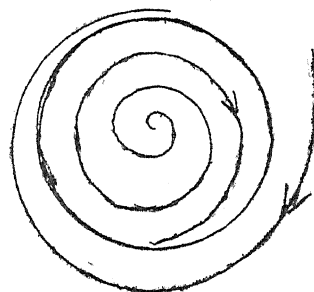
$$2) \frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1)$$

of in poolcoördinaten

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1)$$

$$\dot{\theta} = -1.$$



Uit de eerste vergelijking volgt

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - Ae^{2t}}},$$

waarbij $A = \frac{r_0^2 - 1}{r_0^2}$

als $r_0 < 1$, dan is $A < 0$ en

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + |A|e^{2t}}}$$

zodat voor $t \rightarrow \infty$ $r \rightarrow 0$.

Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

door

Prof. Dr R. Timman

27 april 1956

Als derde voorbeeld van limietcyclen beschouwen wij het systeem:

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 + y^2 - 1)^2 - y$$

$$\frac{dy}{dt} = y(x^2 + y^2 - 1)^2 + x$$

of in poolcoördinaten

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1)^2 \quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r(r^2 - 1)^2} \quad \text{Stel } r^2 = u.$$

$$2 \frac{dt}{du} = \frac{1}{u(u-1)^2} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}$$

$$2t = \log\left(\frac{u}{u-1}\right) - \frac{1}{u-1} - \log c.$$

$$\frac{u}{u-1} \cdot e^{-\frac{1}{u-1}} = c \cdot e^{2t}.$$

Voor $u-1=v$ krijgen wij

$$\left(\frac{1}{v} + 1\right)e^{-\frac{1}{v}} = c \cdot e^{2t}.$$

Neem v klein, dus $u \sim 1$ $r \sim 1$.

$$r = 1 - \varepsilon. \quad v = r^2 - 1 \sim -2\varepsilon, \quad \text{d.w.z. } t \rightarrow \infty.$$

$r=1$ is een stabiele limietcyclus.

$$r = 1 + \varepsilon. \quad v \sim 2\varepsilon.$$

$$t \rightarrow -\infty.$$

$$r > 1. \quad e^{2t} \rightarrow 0, \text{ d.w.z. } r \text{ is onstabiel.}$$

De limietcyclus is dus "halfstabiel".

$r=0$ is een singulier punt en wel instabiel.

Algemene eigenschappen van limietcycli. 1)

In het algemeen is het zeer lastig om limietcycli te vinden en algemene criteria zijn er niet.

Er zijn echter enige criteria, die op Poincaré teruggaan en die wij nu bewijzen.

Laat $\underline{f}=(f,g)$ een continue reële vectorfunctie zijn die gedefinieerd is op een open begrensde deelverzameling D van het reële (x,y) vlak.

Beschouw nu het systeem

1) Zie Coddington and Levinson: Theory of ordinary differential equations, McGraw Hill, 1955.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y). \end{cases}$$

Wij veronderstellen, dat voor iedere t_0 en ieder punt (ξ, η) uit D een ondubbelzinnig bepaalde oplossing $\varphi = (\varphi, \psi)$ van het systeem bestaat, zodat $\varphi(t_0, \xi, \eta) = \xi$; $\psi(t_0, \xi, \eta) = \eta$ is.

Een punt van D , waarbij $f=g=0$ is een critiek punt. Andere punten zijn reguliere punten.

Het punt t_0 op een baankromme C verdeelt de baankromme in twee halve baankrommen, de ene wordt doorlopen voor $t \geq t_0$, de andere voor $t \leq t_0$. Onder een limietpunt Q van een halve baan C^+ verstaan wij een punt zodanig, dat een rij getallen t_n bestaat, zodanig dat $t_n \rightarrow \infty$ voor $t \rightarrow \infty$ en dat $P(t_n) = \{x(t_n), y(t_n)\} \rightarrow Q$.

De verzameling van alle limietpunten voor een halve baan C^+ is een limietverzameling $L(C^+)$. Dan geldt

Stelling 1.

Als C^+ een positieve halve baan is, die in een gesloten verzameling K is bevat, dan is $L(C^+)$ niet leeg en vormt een gesloten, samenhangende puntverzameling.

Wij schrijven voor de oplossing $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dan is C^+ de kromme $\varphi = (\varphi, \psi)$ voor $t \geq t_0$.

Beschouw de oneindige puntreeks $\varphi(t_0 + u)$, deze ligt binnen een afgesloten puntverzameling in het platte vlak en heeft dus deelreeks, die convergent is tot een punt, dat in K ligt, want K is afgesloten. $L(C^+)$ is dus niet leeg.

Wij laten nu zien, dat $L(C^+)$ afgesloten is. Laat Q een verdichtingspunt zijn van $L(C^+)$. Dan bestaat er een puntrijs $Q_n \in L(C^+)$, zodat $d(Q_n, Q) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, waarbij $d(Q_n, Q)$ de afstand van Q tot Q_n is. Voor iedere Q_n bestaat er een $t_n > n$, zodat $d\{\varphi(t_n), \psi(t_n), Q_n\} < \frac{1}{n}$. Dus voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een geheel getal N_ε , zodat

$d\{\varphi(t_n), \psi(t_n), Q_n\} < \varepsilon/2$ en $d(Q_n, Q) < \varepsilon/2$ voor $n > N_\varepsilon$.

Dan is ook

$$d\{\varphi(t_n), \psi(t_n), Q\} < \varepsilon \quad \text{voor } n > N_\varepsilon.$$

Dit betekent, dat $Q \in L(C^+)$ want $t_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$. Elk verdichtingspunt van $L(C^+)$ behoort dus tot $L(C^+)$, de limietkromme is afgesloten.

Denk nu, dat $L(C^+)$ niet samenhangend is.

Dan zijn er twee niet lege, afgesloten puntverzamelingen, M en N die geen enkel punt gemeen hebben, zodat $L(C^+)$ de som is van M en N . Daar M en N beiden begrensd zijn, hebben zij een eindige afstand δ . Daar de punten van M en N limietpunten zijn van C^+ , bestaat er een willekeurig grote t , zodat $P(t)$ binnen een afstand $\delta/2$ van M ligt en eveneens een willekeurig grote t , zodat de afstand tot M groter is dan $\delta/2$. Daar de afstand

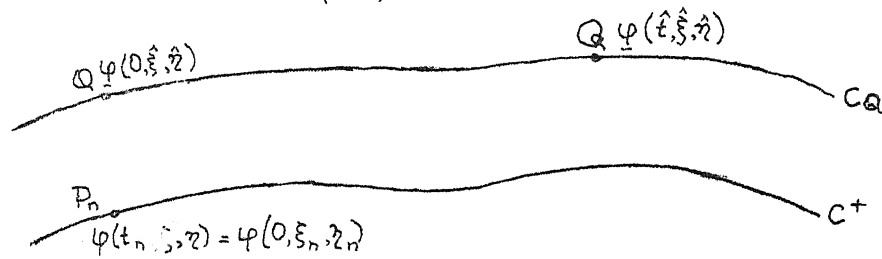
$d(P, M)$ van ieder punt tot M een continue functie is, en daar de coördinaten van P continue functies zijn van t , bestaat er dus een getallenrij $\{t_n\}$, zodat $d\{P(t_n), M\} = \delta/2$. De puntrijs $P(t_n)$ moet een deelrij bevatten, die tot een punt Q convergeert, dat een limietpunt van C^+ moet zijn. Dus $Q \in L(C^+)$ en $d(Q, M) = \delta/2$. Dan ligt Q echter noch in M noch in N , want ook is

$$d(Q, N) > d(N, M) - d(Q, M) = \delta/2.$$

Dit geeft een contradictie, dus is de stelling bewezen.

Stelling 2.

Indien C^+ een halve baan is, die in een gesloten deelverzameling K van het vlak ligt en indien $L(C^+)$ een regulier punt Q bevat, maakt de baan C_Q dus Q een deel uit van $L(C^+)$.



De coördinaten van Q noemen wij $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$. C is de kromme $\Psi = (\varphi, \psi)$ voor $t \geq t_0$. Voor $t = t_0$ zij $\Psi = (\xi, \eta)$ en daar Ψ een vectorfunctie is van de beginwaarden is $\varphi = \varphi(t, \xi, \eta)$. Daar Q een limietpunt is van C^+ bestaat er een getallenrij $t_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$, zodat de punten P_n met coördinaten $\varphi(t_n, \xi, \eta), \psi(t_n, \xi, \eta)$ tot Q naderen voor $n \rightarrow \infty$.

Wij kiezen op de kromme dan P_n nieuwe parameters, nl. de waarden ξ_n, η_n voor $t = t_n$, zodat wij deze baankromme schrijven als $\Psi(t, \xi_n, \eta_n) \equiv \Psi(t + t_n, \xi, \eta)$.

Beschouw nu de baan door Q . $\Psi(t, \hat{\xi}, \hat{\eta})$ waarbij Q is $\Psi(0, \hat{\xi}, \hat{\eta})$ en een punt \hat{Q} op deze baankromme. Daar Ψ continu is in ξ en η , zal

$\Psi(\hat{t}, \xi_n, \eta_n) \rightarrow \Psi(\hat{t}, \hat{\xi}, \hat{\eta})$ als $n \rightarrow \infty$, want $P_n \rightarrow Q$. Maar dan zal ook $\Psi(t + t_n, \xi, \eta) \rightarrow \Psi(\hat{t}, \hat{\xi}, \hat{\eta})$, d.w.z. het punt Q is een limietpunt van C^+ . Dus de baan C_Q behoort tot $L(C^+)$.

Als Q dus een regulier punt is van $L(C^+)$, dan is de baan C_Q door Q een limietbaan van C^+ .

Wij zien dus, dat $L(C^+)$ bestaat uit kritieke punten en limietbanen.

Indien $L(C^+)$ uitsluitend reguliere punten bevat, bevat $L(C^+)$ dus een complete baankromme.

In het bijzonder geldt de stelling van

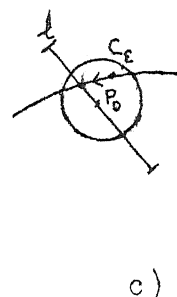
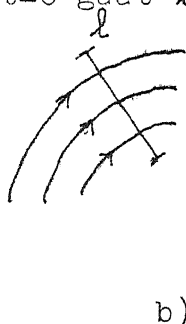
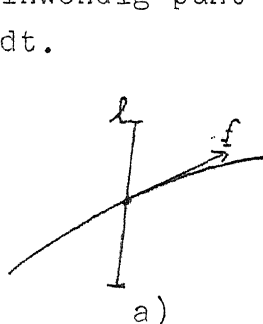
Poincaré-Bendixon.

Indien C^+ een positieve halve baan is, die in een gesloten deelverzameling K bevat is en indien $L(C^+)$ uitsluitend reguliere punten bevat, dan is

- (1) of $C^+ = L(C^+)$ een periodieke baan,
- (2) of $L(C^+)$ is een periodieke baan.

In het laatste geval noemen wij de limietbaan $L(C^+)$ een limietcyclus. Om deze stelling te bewijzen, voeren wij het begrip transversaal in. Een eindig gesloten lijnsegment ℓ is een transversaal ten opzichte van het veld \underline{f} als ieder punt van ℓ regulier is en de richting van \underline{f} ongelijk is aan de richting van ℓ . Voor deze transversaal gelden de volgende eigenschappen.

- a) Ieder regulier punt (x,y) van D is een inwendig punt van één of andere transversaal, die elke richting, behalve die van \underline{f} kan hebben.
- b) Iedere baan, die een punt met een transversaal gemeen heeft, moet hem snijden en al deze banen doorsnijden hem in dezelfde richting.
- c) Indien P_0 een inwendig punt van een transversaal is, bestaat voor iedere ε een cirkel C_ε met P_0 als middelpunt, zodat iedere baan die door een inwendig punt C_ε voor $t=0$ gaat ℓ voor een waarde van t met $|t| < \varepsilon$ snijdt.



Eigenschap a en b volgen direct uit de definitie, wij bewijzen alleen eigenschap c.

Noem de coördinaten van $P_0(\xi_0, \eta_0)$ en laat ℓ een segment zijn van de lijn $ax+by+c=0$. Er is een cirkel om P_0 die uitsluitend reguliere punten bevat. De oplossing φ die $t=0$ door een regulier punt $P(\xi, \eta)$ bij P_0 gaat is continu in de drie variabelen t, ξ en η . Stel $L(t, \xi, \eta) = a\varphi + b\psi + c$, dan is $L(0, \xi_0, \eta_0) = 0$ en $\frac{\partial L}{\partial t}(0, \xi_0, \eta_0) = a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + b \frac{\partial \psi}{\partial t} + c \neq 0$.

Los nu $t(\xi_0, \eta_0)$ op uit $L(t, \xi, \eta) = 0$, dan is t een continue functie van (ξ_0, η_0) , in een omgeving van (ξ_0, η_0) . Er is nu dus een cirkel C_ε om (ξ_0, η_0) zodat $|t(\xi, \eta)| < \varepsilon$ binnen C_ε . De baan door een (ξ, η) binnen C_ε voor $t=0$ zal dan ℓ op $t(\xi, \eta)$ ontmoeten en $|t| < \varepsilon$.

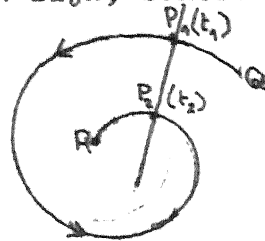
De baankrommen, die binnen een begrensde gebied liggen, gedragen zich als spiralen. Dit wordt uitgedrukt in de volgende stelling:

Als een eindige, afgesloten boog A van een baankromme C een transversaal ℓ snijdt, snijdt zij ℓ in een eindig aantal punten. De rangorde van deze punten op ℓ is dezelfde als op C . Als C periodiek is, snijdt zij ℓ slechts in één punt.

Laat A bepaald worden door $\varphi = \{\varphi(t), \psi(t)\}, t_1 \leq t \leq t_2$ waarbij t_1 en t_2 eindig zijn. Wij bewijzen eerst, dat A slechts eindig veel punten met ℓ ge-

meen heeft. Denk nl., dat er oneindig veel zijn, t_1, t_2, \dots, t_n , dan hebben deze een verdichtingspunt \hat{t} op \mathcal{L} . De grootheid $\frac{\varphi(t_n) - \varphi(\hat{t})}{t_n - \hat{t}}$ zal dan naderen tot de richtingsvector $\frac{d\varphi}{dt}$ in het punt \hat{t} van het veld. Maar anderzijds is $\frac{\varphi(t_n) - \varphi(\hat{t})}{t_n - \hat{t}}$ de helling van \mathcal{L} , zodat de richtingsvector in \hat{t} dezelfde richting zal hebben als \mathcal{L} , wat uitgesloten is.

Wij bewijzen nu, dat de volgorde op A dersnijpunten dezelfde is als op \mathcal{L} . Laat P_1 en P_2 twee opeenvolgende snijpunten zijn, behorend bij $t=t_1$ en $t=t_2$, dan zal de gesloten kromme J gevormd door de baankromme tussen P_1 en P_2 en het tussenliggende segment van \mathcal{L} het vlak in twee delen verdelen. Dan zullen Q , behorend bij $t < t_1$ en R , behorend bij $t > t_2$ aan verschillende kanten van \mathcal{L} liggen als zij voldoende dicht bij P_1 en P_2 liggen. Laat R binnen J liggen. Opdat C buiten J komt voor $t > t_2$ moet C door J gaan. Maar C kan niet door het segment P_1P_2 van \mathcal{L} gaan en kan niet P_1P_2 in tegengestelde richting snijden. C moet dus binnen J blijven. De volgende doorsnijding P_3 met \mathcal{L} ligt dus binnen J en valt niet samen met P_2 , P_2 ligt dus binnen P_1 en P_3 op \mathcal{L} en op C .

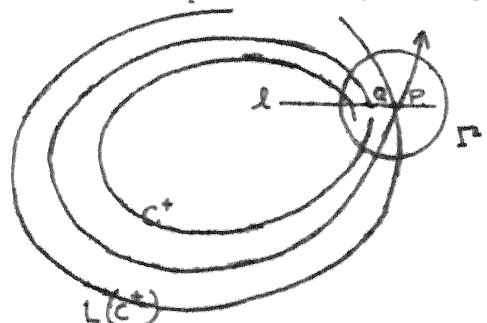


Als P_1 en P_2 samenvallen, is C periodiek, omgekeerd veronderstel, dat P_1 niet samenvalt met P_2 en dat C periodiek is. Dan moet de boog van R op C naar Q teruggaan en dus J snijden, maar dit kan niet en dus moeten P_1 en P_2 samenvallen.

Wij kunnen nu de stelling van Poincaré-Bendixon bewijzen en merken op, dat als C^+ en $L(C^+)$ een punt gemeen hebben C^+ een periodieke baan is. Inderdaad, laat $P_1 = P(t_1)$ een gemeenschappelijk punt van C^+ en $L(C^+)$ zijn. Het is regulier, want wij beschouwen alleen $L(C^+)$ met reguliere punten.

Er is dus een transversaal \mathcal{L} met P_1 als inwendig punt. Daar P_1 op $L(C^+)$ ligt moet een cirkel Γ met P_1 als middelpunt een punt $Q = P(\hat{t})$ bevatten, waarbij $\hat{t} > t_1 + 2$ is. Neem nu $\varepsilon = 1$, dan bestaat er, zoals boven is bewezen een $\tilde{P} = P(\tilde{t})$ op C^+ waarbij $|\hat{t} - \tilde{t}| < 1$ en \tilde{P} op \mathcal{L} ligt. Denk, dat \tilde{P} niet met P_1 samenvalt. Dan zijn er eenduidig aantal snijpunten met \mathcal{L} op boog P, \tilde{P} , de puntrij van snijpunten van C^+ met \mathcal{L} vormt een monotone rij, die wegloopt van P_1 . Dan kan echter P_1 geen limietpunt van C^+ zijn en ligt dus niet op $L(C^+)$. Dus moet \tilde{P} met P_1 samenvallen en is C^+ periodiek. Verder zien we dat een transversaal $L(C^+)$ slechts in één punt snijden kan.

Tenslotte geldt, dat indien $L(C^+)$ een periodieke baan bevat, zij daarmee identiek is. Noem C_0 de periodieke baan, die deel uitmaakt van $L(C^+)$ en laat het een echt deel zijn.



Daar $L(C^+)$ samenhangend is, bevat C_0 een verdichtingspunt Q_0 van de rest $L(C^+) - C_0$. Laat l een transversaal door Q_0 zijn. Iedere cirkel met Q_0 als middelpunt bevat een punt Q van $L(C^+) - C_0$ en als Q dicht genoeg bij Q_0 is, zal de baan C_Q door Q de transversaal l snijden. De baan C_Q is een limietbaan en is verschillend van C_0 . Dus l heeft twee snijpunten met $L(C^+)$, in tegenspraak met het vorige. Dus moet $L(C^+)$ met C_0 samenvallen. Nu kunnen wij de stelling van Poincaré-Bendixon bewijzen. Als C^+ periodiek is, is $C^+ = L(C^+)$.

Neem aan, dat C^+ niet periodiek is. Daar $L(C^+)$ niet leeg is en slechts reguliere punten bevat, bestaat er een limietbaan C_0 in $L(C^+)$. Nu ligt C_0 in K dus C_0^+ heeft een limietpunt P_0 , dat op $L(C^+)$ ligt. Als l een transversaal door P_0 is, dan kan deze $L(C^+)$ niet in een ander punt snijden. Daar P_0 limietpunt in C_0^+ is moet l C_0^+ in een punt snijden, dat moet P_0 zijn en dus hebben C_0^+ en $L(C^+)$ het punt P_0 gemeen. Dus is C_0^+ en ook C_0 periodiek en zij moeten samenvallen met $L(C^+)$.

door

Prof. Dr R. Timman

11 mei 1956

Limietverzamelingen met kritieke punten.

Wij beschouwen nu het geval, dat $L(C^+)$ een eindig aantal kritieke punten bevat.

Stelling. Laat C^+ een halve baan zijn, die in een afgesloten deelverzameling K van D bevat is. Laat D slechts een eindig aantal kritieke punten bevatten. Dan geldt:

- (i) $L(C^+)$ bestaat slechts uit één enkel punt, dat een kritiek punt is, waartoe C voor $t \rightarrow \infty$ nadert
- (ii) $L(C^+)$ is een periodieke baan of
- (iii) $L(C^+)$ bestaat uit een eindig aantal kritieke punten, verbonden door banen, die voor $t \rightarrow \pm \infty$ tot deze kritieke punten naderen.

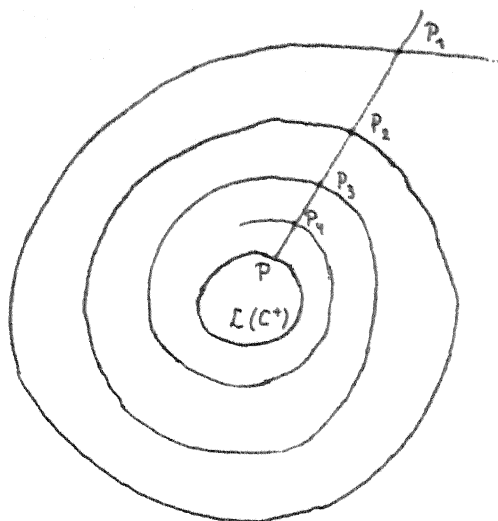
Bewijs (i). De verzameling $L(C^+)$ kan hoogstens een eindig aantal kritieke punten bevatten. Als $L(C^+)$ geen reguliere punten bevat, dan moet zij, daar zij enkelvoudig samenhangend is, slechts uit een punt bestaan. C^+ zal tot dat punt naderen.

(ii) Als $L(C^+)$ reguliere punten bevat, dan bestaat zij uit kritieke punten en limietbanen. Laat C_0 zo'n limietbaan zijn. Deze baan moet een singulier punt als limietpunt hebben, want als hij een regulier limietpunt had, moest hij periodiek zijn. Maar dan was $L(C^+) = C_0$. De limietpunten van de banen in $L(C^+)$ zijn dus kritieke punten. Laat C_0 zo'n baan zijn, dan bestaan $L^+(C_0)$ en $L^-(C_0)$ elk uit een kritiek punt. Deze punten kunnen samenvallen. Verder zien we: Als C^+ een halve baan is, die in een gebied $K \subset D$ bevat is en als $L(C^+)$ slechts één kritiek punt P bevat, dan zal een limietbaan steeds tot P naderen als $t \rightarrow +\infty$ of $t \rightarrow -\infty$ gaat.

Beschouw nu het geval, dat $L(C^+)$ een regulier punt P bevat. Dan is C^+ periodiek of niet. In het eerste geval is $L(C^+) = C^+$, in het tweede geval brengen wij een transversaal l door P aan.

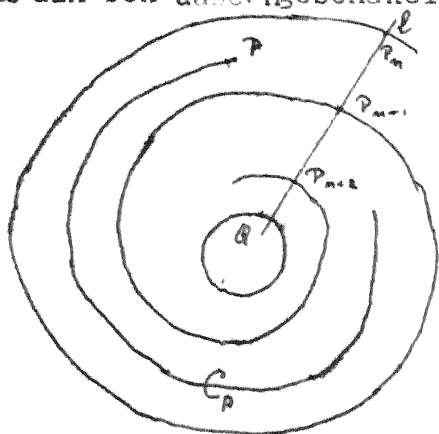
Dan is vroeger bewezen, dat C^+ l in een oneindige puntrij snijdt, die monotoon tot P convergeert. Begin met $t=t_1$: en achtereenvolgens

P_1, P_2, P_3, \dots . Wij beschouwen weer de Jordan kromme J_n , die wordt gevormd door de boog $P_n P_{n+1}$ op C^+ en het lijnsegment $P_n P_{n+1}$ op l . Bij J_n behoort een binnengebied I_n en een buitengebied E_n . Denk, dat P_3 in I_1 ligt. Dan volgt uit het vooraangaande, dat steeds I_{n+1} binnen I_n ligt, dus ligt $L(C^+)$ in I_n voor alle n . $L(C^+)$ ligt dus in de doorsnijding I van alle I_n en vormt er de rand van. Om dit aan te tonen, merken wij eerst op, dat $L(C^+)$ in alle I_n ligt en dus tot I behoort. Daar echter



geen inwendigpunt van I randpunt kan zijn, maakt $L(C^+)$ deel uit van de rand van I . Omgekeerd is ieder punt op de rand van I een limietpunt van C^+ . Wij hebben nu $L(C^+)$ bepaald uit het gedrag van één halve baankromme C^+ . De situatie is echter zo, dat niet alleen deze halve baankromme, maar iedere andere halve baankromme, die start in een punt P , dat niet te ver van $L(C^+)$ aflight, $L(C^+)$ als grenskromme heeft en ook in een spiraalvorm tot $L(C^+)$ nadert.

Wij beschouwen het geval, dat C^+ in het buitengebied van I ligt en dat zij een regulier punt bevat. Neem dan weer een transversaal door Q . Er bestaat dan een aaneengesochte rij afgesloten verzamelingen $\{I_n\}$ zodat



de begrenzing van hun gemeenschappelijke doorsnede I gevormd wordt door $L(C^+)$. Als P dicht genoeg bij $L(C^+)$ ligt, dan ligt P binnen een I_n en buiten de volgende I_{n+1} . De halve baankromme C_P^+ door P kan de begrenzing van I_n en I_{n+1} niet snijden en dus moet C_P^+ binnen $\overline{I_n - I_{n+1}}$ liggen of 1 snijden in het segment $P_{n+1}P_{n+2}$. In het

eerste geval moet $L(C_P^+)$ ook in $\overline{I_n - I_{n+1}}$ liggen. Als N groot genoeg is, dus P dicht genoeg bij $L(C^+)$ ligt, dan liggen er geen kritieke punten in $\overline{I_n - I}$ voor $n > N$, want op de (C^+) liggen kritieke punten en deze zijn geïsoleerd. Dan bevat $L(C_P^+)$ alleen reguliere punten en volgens de stelling van Poincaré-Bendixson moet zij periodiek zijn. Vooruitlopend op een stelling, die straks wordt bewezen, onafhankelijk van het voorafgaande, moet een periodieke baankromme steeds een singulier punt in het inwendige bevatten, dat punt moet echter ook in $\overline{I_{n+1} - I_n}$ liggen, in tegenstelling tot onze onderstelling.

Dus moet C_P door het segment $P_{n+1}P_{n+2}$ in I_{n+1} binnentreden en vervolgens in alle I_{n+k} , zodat C_P ook nadert tot $L(C^+)$.

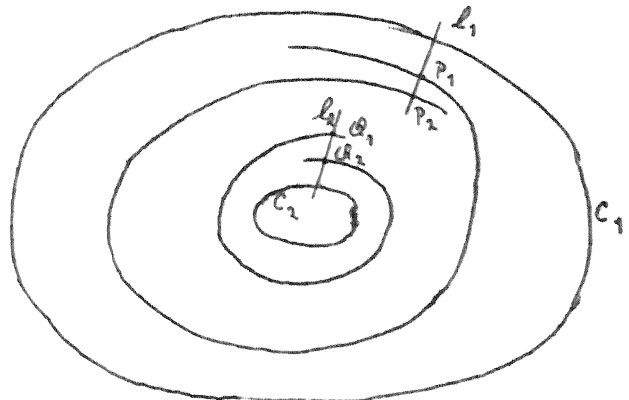
Wij hebben dus de volgende stabiliteit. Bij iedere ϵ is een δ te vin-

den, zodat elke baankromme, die op een afstand δ van een limietkromme begint binnen een afstand ϵ van deze limietkromme blijft voor voldoende grote t . Deze stabiliteit heet baanstabiliteit, en in dit geval positieve stabiliteit. Als het verschijnsel voor $t \rightarrow -\infty$ plaats vindt, spreken wij van negatieve stabiliteit.

De vraag naar het criterium dat een periodieke baan C positief stabiel is, wordt zowel voor het binnengebied als voor het buitengebied geleverd door de twee mogelijkheden:

- 1) Een baan nadert tot C als limietcyclus voor $t \rightarrow \infty$ of
- 2) Er zijn periodieke banen in iedere ϵ omgeving van C . Dat de voorwaarden voldoende zijn is juist bewezen, immers als één baan tot C nadert, zullen alle banen, die in zekere omgeving starten, dit doen.

Dat zij voldoende is tonen wij als volgt aan. Neem aan, dat C stabiel is en dat er geen periodieke banen in iedere ϵ -omgeving van C zijn. Dan zal een positieve halve baan C^+ , die op een afstand $< \delta_\epsilon$ van C begint, een limietbaan $L(C^+)$ moeten hebben. Dan moet echter $L(C^+) = C$ zijn, dus C is een limietcyclus. Beschouw nu twee opeenvolgende periodieke banen C_1 en C_2 , waarbij C_2 binnen C_1 ligt, zodanig, dat er geen kritieke punten of periodieke banen tussen C_2 en C_3 liggen. In dit geval kan het niet voorkomen, dat zowel C_1 als C_2 positief stabiel in het binnengebied zijn, d.w.z. C_2 kan niet tegelijkertijd positief stabiel van buiten en C_1 positief stabiel van binnen zijn. Breng twee transversalen l_1 en l_2 , die een baan bij C_1 en een baan bij C_2 snijden en beschouw het gebied R begrensd door de boog P_1P_2 , het segment P_1P_2 en boog Q_1Q_2 met het segment Q_1Q_2 . Vervang nu t door $-t$, d.w.z. draai de omloopszin op de banen om.



Een baan C , die op de rand van R begint moet in R blijven en daar in R geen kritieke punten liggen, moet zij periodiek zijn volgens de stelling van Poincaré-Bendixson. Dan zijn echter C_1 en C_2 geen twee opeenvolgende banen.

De index van een singulier punt.

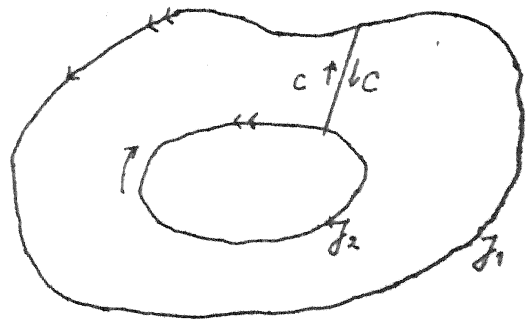
Wij beschouwen weer het vectorveld \underline{f} en daarin een gesloten kromme J , die niet door een kritiek punt gaat. \underline{f} is continu en heeft slechts een eindig aantal kritieke punten. Beschouw nu de verandering, die de hoek, die $\underline{f}(\underline{x})$ maakt met een vaste lijn als \underline{x} de kromme J doorloopt. De index van de kromme J is het getal $\frac{\Delta \theta}{2\pi} = I_f(J)$, dat klaarblijkelijk geheel is, daar de vector wegens de eenduidigheid na het doorlopen weer dezelfde richting heeft.

Nu geldt de belangrijke stelling:

Als de Jordan kromme J geen kritieke punten omsluit, dan is $I_f(J)=0$.

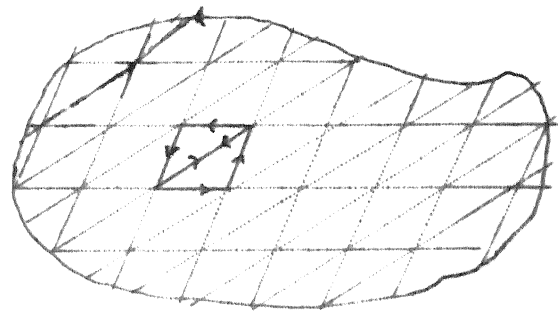
Wij verdelen het gebied door J omsloten in kleine driehoeken. Daar \underline{f} een continu vectorveld is en \underline{f} nergens binnen J een singulier punt heeft, kan men deze driehoeken zo klein kiezen, dat de verandering van de richting van \underline{f} langs elke zijde kleiner is dan een willekeurig klein getal en dus zeker zo, dat de verandering kleiner is dan 2π langs de gehele omtrek van zo'n driehoekje. Daar het binnengebied van J afgesloten is, als we de rand J meetellen, is \underline{f} daar gelijkmatig continu, zodat wij een gemeenschappelijke maximum diameter δ kunnen aangeven die voor alle driehoekjes geldt. Daar de index voor één driehoekje kleiner is dan 1, moet hij nul zijn. Alle driehoekjes doorlopen wij in dezelfde zin als wij J

doorlopen. Beschouw nu twee driehoekjes, die een zijde gemeen hebben. De draaiing die de vector, een keer, dat deze zijde doorlopen wordt, ondergaat, is gelijk maar tegengesteld aan de draaiing, die hij de andere keer ondergaat. De totale hoekverdraaiing langs J is gelijk aan de som van de hoekverdraaiingen bij het



doorlopen van de driehoekjes, want alle bijdragen van begrenzungen binnen J vallen weg. Daar de hoekverdraaiing voor elk van de driehoekjes nul is, is dus de totale hoekverdraaiing ook nul. De index is dus nul. Verder is het duidelijk, dat indien een Jordan kromme J_1 een Jordan kromme J_2 geheel omsluit, de index van J_1 gelijk moet zijn aan de index van J_2 , indien er geen singuliere punten tussen liggen.

Breng maar een coupure aan en doorloop de omtrek van het tussenstuk C . Dan is de kromme J_1+C-J_2-C een Jordan kromme, die geen singuliere punten omsluit, dus is haar index nul. Daar de index van J_2 , die in wijzer zin wordt doorlopen, tegengesteld is aan de index in J_2 in tegenwijzer zin doorlopen, volgt direct:

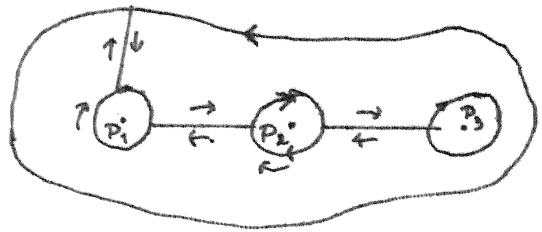


$$I_f(J_1) = I_f(J_2).$$

Onder de index van een singulier punt verstaan wij de index van een Jordan kromme, die dat singuliere punt en geen andere omsluit. Dit getal is blijkbaar onafhankelijk van de keuze van deze kromme.

Het is nu gemakkelijk aan te tonen, dat de index van een willekeurige Jordan kromme J gelijk is aan de som van de indices van de singuliere punten, die door die kromme worden omsloten. Om dit te bewijzen, leggen

wij om elk van deze punten een Jordan kromme, die binnen J ligt en verbinden de omsluitende kromme J met een andere en deze onderling door lijnsegmenten.



Zo ontstaat een enkelvoudig samenhangend gebied begrensd door een Jordan kromme,

waarbinnen geen singuliere punten liggen. De index van het geheel is dus nul.

$$I(J) - I(P_1) - I(P_2) \dots - I(P_n) = 0,$$

waarmee de bewering is bewezen. Omtrent de index van een periodieke baankromme geeft de volgende stelling uitsluitel.

Als J een Jordan kromme is met een continu variërende raaklijn v , die nergens op J nul wordt, dan is:

$$I_v(J) = 1.$$

Voor het bewijs is het voldoende om eenheidsvectoren \underline{u} te beschouwen langs de raaklijn. Wij kiezen het coördinatensysteem x, y zo, dat J ligt in het vlak $y \geq 0$ en aan de x as in het punt P_0 raakt.

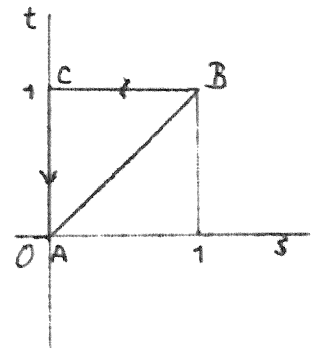
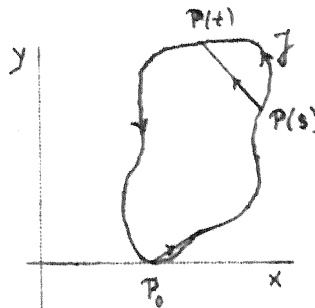
De punten van J zijn gegeven door $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $0 \leq t \leq 1$ waarbij $t=0$ en $t=1$ met P correspondeert.

Dan is

$$\underline{v}(t) = (\dot{\alpha}, \dot{\beta})$$

en

$$\underline{u}(t) = \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}}, \frac{\dot{\beta}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}}.$$



Naast de raaklijneenhedsvector $\underline{u}(t)$ voeren wij een koordenvector

$\underline{\tilde{u}}(s, t)$ in als volgt: $\underline{\tilde{u}}(s, t)$ is de eenheidsvector in de richting van het punt $P(s)$ naar het punt $P(t)$ en $\underline{\tilde{u}}(s, s) = \underline{\tilde{u}}(s)$. Hierbij is $0 \leq s \leq t \leq 1$.

Dan is $\underline{\tilde{u}}(0, 0) = \underline{u}(0)$ en verder is $\underline{\tilde{u}}(0, 1)$ gedefinieerd als $\underline{\tilde{u}}(0, 1) = -\underline{u}(0)$.

De hoek, die $\underline{\tilde{u}}(s, t)$ met de x as maakt, noemen wij Θ . In het (s, t) vlak is $\underline{\tilde{u}}(s, s)$ een continu vectorveld, gedefinieerd in de driehoek, begrensd door $AC: s=0, 0 \leq t \leq 1$; $CB: t=1, 0 \leq s \leq 1$; $AB: 0 \leq s=t \leq 1$ en de schuine zijde komt overeen met de kromme J . $\underline{\tilde{u}}(s, t)$ is nergens in de driehoek nul en is verder continu. Daar de omtrek van de driehoek een Jordan kromme is, is $I_{\underline{\tilde{u}}}(\Delta ABC) = 0$ en dus geldt

$$\Delta \Theta_{AB} + \Delta \Theta_{BC} + \Delta \Theta_{CA} = 0.$$

Langs AC is Θ de hoek, $\Theta(0, t)$ dus de hoek, die de koorde vanuit P_0 naar de punten van J met de x as maakt; deze varieert van 0 tot π , dus is

$$\Delta \Theta_{BC} = \pi,$$

Langs BC is $\Delta \Theta$ de hoek, die de koorde met eindpunt P_0 met de as maakt,

deze loopt dus van 2π tot π , d.w.z.

$$\Delta\theta_{BCA} = -\pi.$$

Hieruit volgt, dat

$$\Delta\theta_{AB} = 2\pi,$$

de raaklijn draait over een hoek 2π , de index van J t.o.v. v is dus in het (x,y) vlak 1.

Voor een periodieke baankromme is de richtingsvector in ieder punt de raaklijn aan de baankromme, de index van de periodieke baankromme is dus +1. Daar een Jordan kromme, die geen singuliere punten omsluit, de index nul heeft, volgt hieruit, dat binnen een periodieke baankromme steeds één of meer singuliere punten moeten liggen, waarvan de som van de indices de waarde één heeft.

Om nu gebruik te kunnen maken van deze begrippen, moeten wij voor de verschillende typen singuliere punten de index berekenen.

Wij beschouwen weer het tweedimensionale systeem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + f(x,y), \\ \dot{y} &= cx + dy + g(x,y),\end{aligned}$$

waarbij $ad-bc \neq 0$ is.

f en g zijn continu in een cirkel om 0: $0 \leq r = \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$ en $f=0(r)$, $g=0(r)$ als $r \rightarrow 0$.

Er is dus een omgeving van 0 aan te geven, waarbinnen geen tweede singulier punt ligt.

Het ligt voor de hand, dat de index van 0 t.o.v. het complete systeem gelijk is aan die t.o.v. het benaderingssysteem.

Daartoe beschouwen wij eerst twee continue vectorfuncties \underline{u} en \underline{v} op een Jordan kromme, die niet nul worden op deze kromme en nergens tegengestelde richting hebben. De index van J t.o.v. deze twee vectorsystemen is dan gelijk.

$$I_u(J) = I_v(J).$$

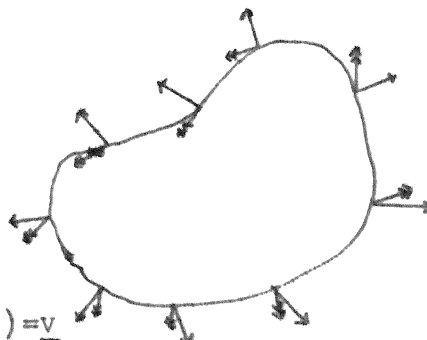
Wij vormen een continue overgang tussen u en v in ieder punt en definiëren een vector

$$\underline{w}(s) = (1-s)\underline{u} + s\underline{v} \quad (0 \leq s \leq 1)$$

Dan is $\underline{w} \neq 0$ voor $0 \leq s \leq 1$, want $\underline{w}(0) = \underline{u}$, $\underline{w}(1) = \underline{v}$ en als $\underline{w}(s) = 0$, voor een $s \neq 0$, of 1, dan geldt $\underline{u} = -\frac{s}{1-s}\underline{v}$ ($0 < s < 1$)

dus \underline{u} zou tegengesteld aan \underline{v} zijn, wat uitgesloten is. De index $I_w(J)$ is klaarblijkelijk een continue functie van s in het afgesloten interval $0 \leq s \leq 1$. Daar zij echter een geheel getal is, moet zij onafhankelijk zijn van s, d.w.z. voor $s=0$ en $s=1$ heeft zij dezelfde waarde.

$I_u(J) = I_v(J)$. Hiermee kunnen wij de stelling bewijzen:



De index van elke oorsprong t.o.v. het vectorveld

$$\underline{u} = \{ax + by + f(x,y), cx + dy + g(x,y)\}$$

en $\underline{v} = \{ax + by; cx + dy\}$

is dezelfde.

Wij moeten eerst laten zien, dat u en v op een kleine cirkel $r = \delta$ niet tegengesteld zijn. Denk, dat dit op een punt $x = \delta \cos \vartheta, y = \delta \sin \vartheta$ het geval is.

Dan is voor een zekere s de vector

$$\underline{w} = \underline{u} + s\underline{v} = (1+s)\underline{v} + \underline{g} = 0 \quad (0 \leq s \leq 1).$$

waarbij $\underline{g} = (f, g)$.

Dit betekent

$$(1+s)^2 \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{g}\|^2$$

$$\text{of } (1+s)^2 \delta^2 \{(a \cos \vartheta + b \sin \vartheta)^2 + (c \cos \vartheta + d \sin \vartheta)^2\} = \{f^2 + g^2\}.$$

Nu is

$$\min \{(a \cos \vartheta + b \sin \vartheta)^2 + (c \cos \vartheta + d \sin \vartheta)^2\} = m > 0$$

daar $ad - bc \neq 0$. Dus geldt:

$$\|\underline{v}\| \geq m\delta \quad \text{en dus voor alle } \delta > 0 \\ m^2(1+s)^2 \delta^2 \leq \|\underline{g}\|^2.$$

Daar echter $\|\underline{g}\| = 0(\delta)$ komen wij op een contradictie. Ook zijn niet \underline{u} en $\underline{v} = 0$ op de cirkel, $v = \delta$ zodat de stelling geldt.

Wij behoeven nu alleen nog maar de index voor het benaderingssysteem

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

te berekenen.

Stel $x = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta$, dan is de hoek, die de vector met de x as maakt

$$\arctg \frac{c \cos \vartheta + d \sin \vartheta}{a \cos \vartheta + b \sin \vartheta}$$

en de index is

$$I_v(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d \arctg \frac{c \cos \vartheta + d \sin \vartheta}{a \cos \vartheta + b \sin \vartheta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(ad-bc)dt}{(c+dt)^2 + (a+bt)^2} = \\ = \frac{ad-bc}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt(b^2+d^2)}{\{(b^2+d^2)t+ab+cd\}^2 + (ad-bc)^2} = \begin{cases} +1 & \text{als } ad-bc > 0 \\ -1 & \text{als } ad-bc < 0. \end{cases}$$

Het geval $ad-bc < 0$ karakteriseert de zadelpunten.

Wij vinden dus, dat uitsluitend voor de zadelpunten de index -1 is, voor alle andere typen singuliere punten is de index $+1$.

Binnen een gesloten baan kromme kan dus nooit één zadelpunt liggen zonder andere singuliere punten.

Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

door

Prof. Dr R. Timman

25 mei 1956

Wij beschouwen nu, aansluitend aan de algemene theorie van de topologische methoden de methode van Liénard en wel eerst voor de differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0,$$

waarbij $f(x)$ een reële even functie is van x .

Stel eerst

$$v = \dot{x}$$

dan wordt de vergelijking:

$$\frac{dv}{dx} + f(x) + \frac{x}{v} = 0.$$

Voer nu in de variabelen

$$y = v + F(x)$$

waarbij

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$$

een oneven functie is van x .

Dit geeft:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y-F(x)} = 0.$$

De normaal op de baankromme door het punt (x_1, y_1) heeft tot vergelijking:

$$(x-x_1)dx + (y-y_1)dy = 0$$

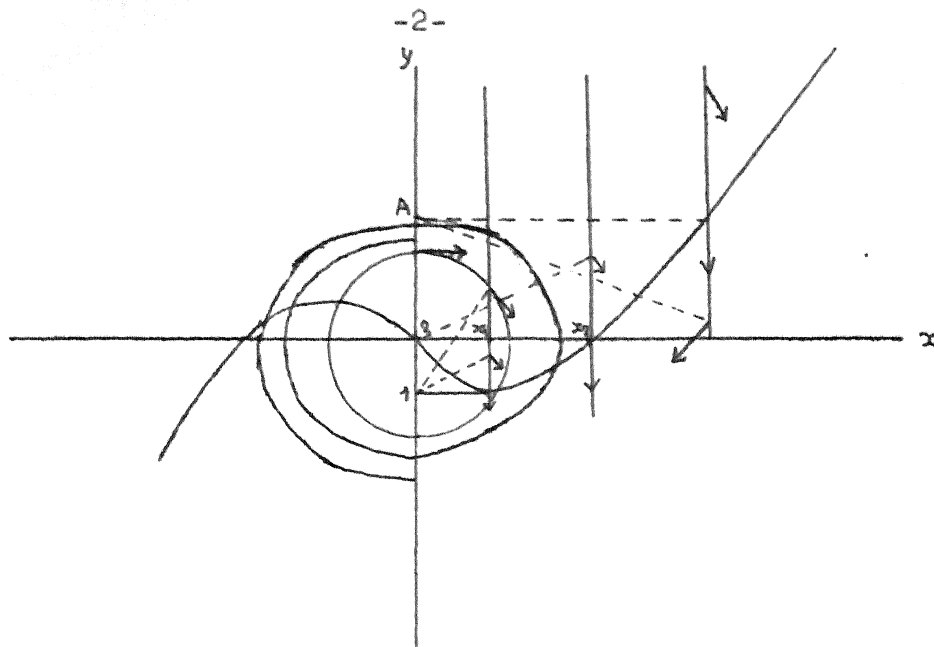
of wel $(x-x_1)\{y_1-F(x_1)\} - (y-y_1)x_1 = 0$.

Het punt $x=0, y=F(x_1)$ voldoet blijkbaar aan deze vergelijking. Voor alle punten (x_1, y_1) met vaste x_1 gaat de normaal dus door het vaste punt $0, F(x_1)$, zodat het richtingsveld direct geconstrueerd kan worden in het (x, y) vlak.

Daar $F(0)=0$ is de oorsprong het enige singuliere punt van de differentiaalvergelijking.

Als $y=F(x)$ is $\frac{dy}{dx} = \infty$, dan is de raaklijn dus verticaal, voor $x=0$ is de raaklijn horizontaal.

De baankrommen zijn symmetrisch t.o.v. de oorsprong, vervanging van x door $-x$ en y door $-y$ verandert de vergelijking niet. Wij zien dus, dat als wij in een bepaald punt A met pos. y_A op de y -as beginnen, wij de Y -as weer snijden in een punt B met negatieve y_B . Nu is er een tweede



snijpunt $y_C = -y_B$ en zo ontstaat de spiraal. Dit voert tot het vermoeden, dat er een limietcyclus moet zijn.

Het bestaan van deze limietcyclus bewijzen wij nu, in navolging van Levinson en Smith voor de iets algemenere vergelijking

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

waarbij $g(x)$ een oneven functie is, die voor $x > 0$ ook > 0 is.

Verder veronderstellen wij, dat $F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$ een enkel nulpunt A heeft voor $x=a$ en voor $x > a$, monotoon stijgend is.

Wij vinden nu de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} + \frac{g(x)}{y-F(x)} = 0.$$

De symmetriecondities zijn dezelfde als boven.

Een baan, die begint in $(0, y_C)$ moet, als hij gesloten is, ook gaan door $(0, -y_C)$.

Om te bewijzen, dat er één en slechts één periodieke baan is, beschouwen wij de functie

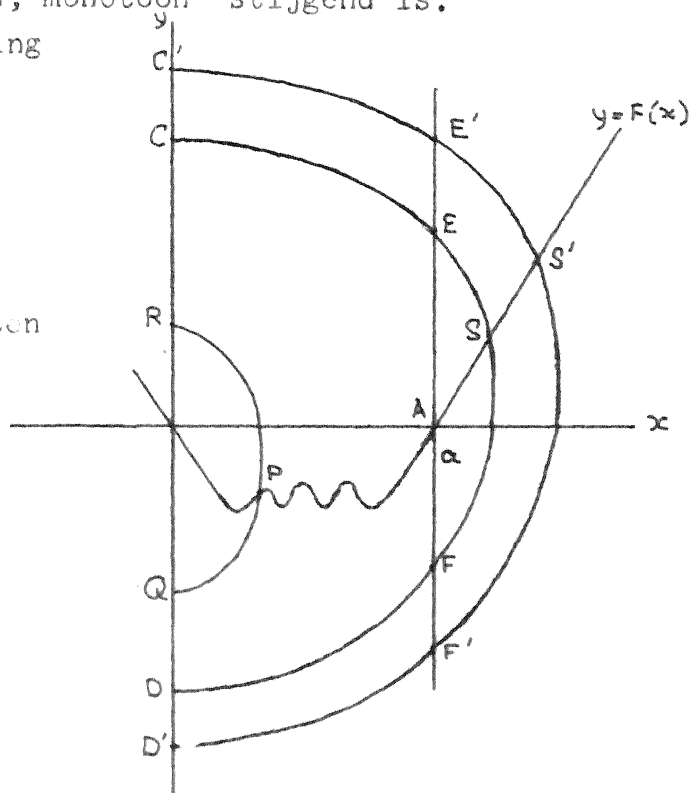
$$U(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$$

waarbij

$$G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi.$$

Schrijf daartoe de vergelijking als

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= y \frac{dy}{dx} + g(x) = \\ &= - \frac{y g(x)}{y-F(x)} + g(x) = \\ &= - \frac{g F(x)}{y-F(x)}, \end{aligned}$$



dus langs een boog AB van een baankromme:

$$\int_A^B \frac{dU}{dx} dx = U_B - U_A = \int_A^B F(x) \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int_A^B F(x) \cdot dy.$$

Beschouw eerst een baan, die de kromme $y=F(x)$ in een punt C links van A snijdt en de y-as in de punten Q en R. Dan is

$$\int_Q^R dU < 0$$

daar $F(x) < 0$ en $dy > 0$ is. Verder is deze bijdrage begrensd.

Beschouw nu twee banen, die de kromme $y=F(x)$ rechts van A snijden in S en S' (S' rechts van S) en de y-as in de punten C en D resp. C' en D'. Dan is weer

$$U_C - U_D = \int_D^C F(x) dy,$$

$$U_{C'} - U_{D'} = \int_{D'}^{C'} F(x) dy.$$

Beschouw het stuk tussen E en F, resp. E' en F', de snijpunten met de lijn $x=a$. Dan is hier

$$\int_F^E dU = U_E - U_F = \int_F^E F(x) dy > 0$$

en verder, omdat $F(x)$ monotoon toeneemt

$$\int_{F'}^{E'} dU > \int_F^E dU.$$

De totale integraal $U_C - U_D$ bestaat dus uit een begrensde negatieve bijdrage van DF en EC en een met steeds verder gaande C en D onbepaald toenemende (wegens de monotonie van $F(x)$) positieve bijdrage. Dus zal zeker op de duur $U_C - U_D > 0$ worden, d.w.z. er is een baankromme, waar $U_C = U_D$ is. Maar voor $x=0$ is $G(x)=0$, zodat $y_C = -y_D$ en een gesloten baankromme is verkregen.

Wij gaan nu weer terug naar de vergelijking van Liénard waarbij $g(x)=x$ is en schrijven inplaats van $f(x)$ $\mu f(x)$.

$$\ddot{x} + \mu f(x) \dot{x} + x = 0.$$

Neem eerst μ klein.

De vergelijking schrijven wij als:

$$x dx + y dy - \mu F(x) dy = 0.$$

Als $\mu=0$ zijn de baankrommen de cirkels

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

Als μ klein is, zal de baan weinig van een cirkel verschillen. Wij zoeken nu voor kleine μ deze baan met het criterium

$$\int_C^D F(x) dy = 0.$$

Voer daartoe poolcoördinaten in

$$x = r \sin \vartheta, \quad y = r \cos \vartheta,$$

zodat de vergelijking wordt:

$$r dr - \mu F(r \sin \vartheta) \cdot [\cos \vartheta \cdot dr - r \sin \vartheta \cdot d\vartheta] = 0$$

of

$$\frac{dr}{d\vartheta} = -\mu \cdot \frac{F(r \sin \vartheta) \cdot r \sin \vartheta}{r - \mu F(r \sin \vartheta) \cos \vartheta} \approx -\mu F(r \sin \vartheta) \cdot r \sin \vartheta.$$

De conditie wordt dan:

$$\int_0^\pi F(r \sin \vartheta) r \sin \vartheta d\vartheta = 0.$$

waaruit r bepaald kan worden.

Indien $f(x) = x^2 - 1$ ontstaat de vergelijking van Van der Pol.

Dan is $F(x) = \frac{1}{3} x^3 - x$ en de voorwaarde wordt:

$$\int_0^\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \sin^4 \vartheta - r \sin^2 \vartheta \right] d\vartheta = 0.$$

of wel

$$\frac{r^2}{4} \cdot -1 = 0$$

dus $r = 2$.

Als $\mu \gg 1$ is de benadering uitgevoerd door Liénard.

Stel nu $y = \mu z$, zodat de vergelijking wordt:

$$\left\{ z - F(x) \right\} dz + \frac{1}{\mu^2} x dx = 0$$

of bij benadering

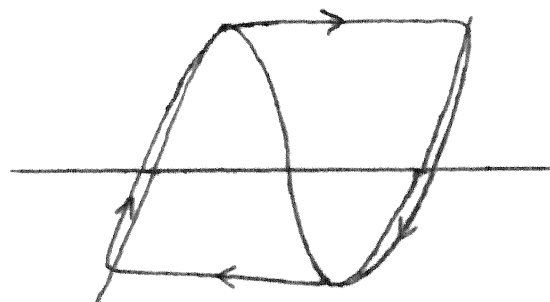
$$\left[z - F(x) \right] dz \approx 0.$$

De baankrommen zijn dus stukken van de lijn $z = F(x)$, verbonden door horizontale lijnsegmenten.

Om de snelheid na te gaan, waarmee dit circuit wordt doorlopen, keren wij terug tot de vergelijkingen

$$-\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y - \mu F(x)} = \frac{dx}{v} = dt$$

die in de nieuwe variabelen wordt:



$$\begin{aligned} dt &= -\mu \frac{dz}{x} \\ \text{dus} \quad \frac{dz}{dt} &= O\left(\frac{1}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Verder is $z \approx F(x)$ op het stuk langs de kromme $z=F(x)$ dus

$$\frac{dz}{dx} \approx f(x),$$

dus:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz/dt}{dz/dx} = O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

De snelheid, waarmee het punt beweegt, is dus klein en de versnelling is van de orde $\frac{1}{\mu^2}$.

Verwaarlozen wij deze versnelling, dan wordt de vergelijking

$$\mu f(x)\dot{x} + x = 0.$$

De tweede orde-vergelijking is dus gedegenereerd in een eerste ordevergelijking, het punt neemt lange tijd om langs deze baan te bewegen.

Op de horizontale lijnen is $dz \approx 0$, $z=\text{const.}$ is $z=F(x)$ eindig, zodat

$$\frac{dx}{dt} = O(\mu) \text{ en } \frac{d^2x}{dt^2} = O(\mu^2).$$

Dan wordt de vergelijking juist

$$\ddot{x} + \mu f(x)\dot{x} = 0$$

en de snelheid hier is juist heel groot.

Storingstheorie

1. De stelling van Poincaré.

Wij bespreken nu methoden om inderdaad periodieke oplossingen te berekenen en wel is dit in het algemeen alleen goed mogelijk voor het geval, dat het systeem vergelijkingen

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \mu) \tag{1}$$

een kleine parameter μ bevat. Indien de vergelijking voor $\mu = 0$ een gemakkelijk aan te geven periodieke oplossing bevat, kan bij benadering een periodieke oplossing voor $\mu \neq 0$ ($|\mu| \ll 1$) worden gevonden.

De methode berust op een stelling van Poincaré (Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste I).

Indien de functies $f(\underline{x}, \mu)$ ontwikkelbaar zijn naar \underline{x} en μ voor alle t met $0 \leq t < t_1$, dan bestaat er een oplossing $\underline{x}(t, \mu, \underline{a})$, die voor $t=0$ de waarde \underline{a} aanneemt en eveneens in een machtreeks naar t, μ, \underline{x}_0 kan worden ontwikkeld.

Wij denken nu, dat de oplossingen van (1) worden ontwikkeld in een reeks naar μ

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \mu \underline{x}_1 + \mu^2 \underline{x}_2 + \dots ,$$

waarbij \underline{x}_m een functie is van t en \underline{a} .

Substitutie geeft

$$\dot{\underline{x}}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0, 0)$$

$$\dot{\underline{x}}_1 = \underline{f}_{\underline{x}_0} \cdot \underline{x}_1 + \underline{X}_1$$

$$\dot{\underline{x}}_m = \underline{f}_{\underline{x}_0} \cdot \underline{x}_m + \underline{X}_m$$

waarbij \underline{X}_m ontwikkeld is in $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{m-1}$ en verder van \underline{x}_0 en t afhangt. Allereerst nemen wij een oplossing, die voor $t=0$ nul is. Dan kunnen de opvolgende coëfficiënten uit de opeenvolgende differentiaalvergelijkingen worden bepaald.

Wij zoeken eerst een oplossing, die nul is voor $t=0$. $\underline{x}=\underline{\theta}(t, \mu)$.

Nu nemen wij aan, dat de functies $\underline{f}(\underline{x}, \mu, t)$ voor alle waarden van t in een interval $0 < t < t_0$ kunnen worden ontwikkeld in machten van μ en $\underline{x}-\underline{\theta}(t, 0)$ d.w.z. dat de particuliere oplossing $\underline{x}=\underline{\theta}(t, 0)$ niet door een singulier punt van de vergelijking gaat.

De stelling van Poincaré zegt nu, dat $\underline{\theta}(t, \mu)$ ontwikkeld kan worden in machten van μ , indien μ voldoende klein is.

Wij kunnen zelfs aannemen, dat $\underline{f}(\underline{x}, \mu)=0$ voor $\underline{x} = \mu = 0$, want wij kunnen $\underline{y} = \underline{x}-\underline{\theta}(t, 0)$ als nieuwe variabelen invoeren, zodat het systeem voor $\mu=0$ de nuloplossing heeft.

Wij stellen nu dus: laat $\underline{f}(\underline{y}, \mu)$ ontwikkeld kunnen worden naar μ en \underline{y} en nul zijn voor $\underline{y}=\mu=0$.

Nu stellen wij de formele reeksen op

$$\underline{y} = \underline{y}_0 + \mu \underline{y}_1 + \mu^2 \underline{y}_2 + \dots$$

De rechterleden \underline{f} kunnen voor $0 < t < t_0$ worden ontwikkeld naar \underline{y} en μ , de convergentiestralen van deze reeksen variëren, neem de onderste grens. In dit geval kunnen wij getallen M en α vinden, zodanig, dat de coëfficiënten in de machtreeksen voor \underline{f} in absolute waarde kleiner zijn dan de overeenkomstige coëfficiënten in de machtreeks voor de functie

$$h_1=h_2 = \frac{M(x_1+x_2+\dots+\mu) [1+\alpha(x_1+x_2+\dots+\mu)]}{1-\alpha(x_1+x_2+\dots+x_n+\mu)}.$$

Door het formele stelsel op te lossen voor het systeem

$$\frac{dz}{dt} = h(\underline{z}, \mu)$$

krijgen wij een reeksontwikkeling, die de reeks voor \underline{y} majoreert, zodat de reeks voor \underline{y} zal convergeren in het convergentiegebied van deze reeks.

Stel nu:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \mu = s,$$

dan geldt:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{n M s(s+1)}{1-s}$$

$$\text{of } n M dt = \frac{ds}{s} - \frac{2 ds}{s+1}.$$

Daar voor $t=0$, $s=\mu$ is

$$n M t = \log \frac{s}{(s+1)^2} - \log \frac{\mu}{(\mu+1)^2}.$$

Dan kan s en ook z_1, \dots, z_n ontwikkeld worden in een reeks naar μ , die voor voldoende kleine μ convergent is.

In de oorspronkelijke variabelen is dan een ontwikkeling in $x-a$ gevonden, zodat ook nog naar a kan worden ontwikkeld (a is beginwaarde).

2. Periodieke oplossingen voor systemen met twee graden van vrijheid.

Beschouw nu het systeem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + \mu f_1(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + \mu f_2(x, y),\end{aligned}$$

waarbij f_1 en f_2 niet lineair zijn en μ klein is. f_1 en f_2 zijn analytische functies van hun argumenten. Voor $\mu=0$ is het systeem lineair en het heeft, zoals wij vroeger hebben gezien, alleen periodieke oplossingen als

$$a + d = 0 \text{ en } ad - bc > 0 \text{ is.}$$

Wij kunnen dus zonder de algemeenheid te schaden, direct stellen

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mu f_1(x, y) \\ \dot{y} = +x + \mu f_2(x, y). \end{cases}$$

Het stelsel voor $\mu=0$ heeft dan zelfs oneindig veel periodieke oplossingen.

$$\begin{cases} x = x_0(t, K) = K \cos t \\ y = y_0(t, K) = K \sin t \end{cases}$$

met willekeurige K .

Wij veronderstellen nu, dat er voor kleine waarden van $\mu \neq 0$ ook periodieke oplossingen zijn, die voor $\mu=0$ in een van deze verzamelingen overgaan met zekere K . Deze oplossingen stellen wij voor door

$$x(t, \mu, K), y(t, \mu, K)$$

en stellen voor $t=0$

$$x(0, \mu, K) = K + \beta_1; \quad y(0, \mu, K) = \beta_2.$$

Volgens Poincaré kunnen $x(t, \mu, K)$ en $y(t, \mu, K)$ nu in machtreeksen naar μ , β_1 en β_2 worden ontwikkeld.

Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

door

Prof. Dr R. Timman

8 juni 1956

Storingstheorie.

1. De stelling van Poincaré.

Wij beschouwen een systeem vergelijkingen

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\underline{x}, \mu) \quad (1)$$

waarbij de rechterleden functies zijn, die in een gebied G met uitzondering van een eindig aantal punten niet alle nul zijn en analytisch zijn. De functies hangen van een parameter μ af.

In het geval, dat voor $\mu=0$ de oplossingen van (1) bekend zijn, ligt het voor de hand te proberen de oplossingen van (1) voor kleine waarden van $\mu \neq 0$ te vinden door middel van reeksontwikkelingen.

Dit idee gaat terug op Poincaré (Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, I, p.58).

Wij geven hier de fundamentele stelling van Poincaré met zijn bewijs weer.

Indien het punt $\underline{x}=0$ geen singulier punt is heeft het stelsel (1) een oplossing, $\underline{\vartheta}(t, \mu)$, zodat $\underline{\vartheta}(0, \mu)=0$. Poincaré onderstelt nu, dat de functies \underline{f} ontwikkeld kunnen worden in machten van $\underline{x} - \underline{\vartheta}(0,0)$ en μ . Dit kan ook anders geformuleerd worden door te zeggen: de baankromme $\underline{x} = \underline{\vartheta}(t, 0)$, behorend bij $\mu=0$ gaat door geen enkel singulier punt. Volgens Poincaré kan nu de oplossing $\underline{\vartheta}(\mu, t)$ ontwikkeld worden volgens opklimmende machten van μ , indien $|\mu|$ voldoende klein is.

Allereerst neemt hij aan, dat het punt $\underline{x}=0$ voor $\mu=0$ een singulier punt is van de vergelijking $\underline{f}(0,0)=0$, d.w.z., dat $\underline{\vartheta}(t,0)=0$. Indien dit niet het geval is, kiezen wij $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{\vartheta}(t,0)$ als nieuwe variabelen. Wij kunnen dus onderstellen, dat $\underline{f}(\underline{x}, \mu)$ ontwikkelbaar is naar \underline{x} en μ .

$$\underline{f}(\underline{x}, \mu) = \underline{f}_0 + \mu \underline{f}_1 + \mu^2 \underline{f}_2 + \mu^3 \underline{f}_3 + \dots$$

Substitutie van de reeks:

$$\underline{x} = \underline{\vartheta}(t, \mu) = \underline{\vartheta}_0(t) + \mu \underline{\vartheta}_1(t) + \mu^2 \underline{\vartheta}_2(t) + \mu^3 \underline{\vartheta}_3(t) + \dots$$

levert een stelsel recursie vergelijkingen; verkregen door opeenvolgende machten van μ links en rechts aan de differentiaalvergelijking gelijk te stellen.

Verder is voor $t=0$ $\underline{x}=0$.

De functies \underline{f}_k zijn ontwikkelbaar naar machten van \underline{x}^1 . Wij kunnen dus functies \underline{g} vinden, zodat de coëfficiënten in de reeksontwikkeling in \underline{f}

in absolute waarden kleiner zijn dan de coëfficiënten in de reeksontwikkeling van g , die positief gekozen kunnen worden.

Stel daartoe

$$g_1 = g_2 = \dots = g_n = \frac{M(x_1 + x_2 + \dots + x_n + \mu) [1 + \alpha(x_1 + x_2 + \dots + x_n + \mu)]}{1 - \alpha(x_1 + \dots + x_n + \mu)}$$

waarbij $\frac{1}{\alpha} <$ kleinste convergentiestraal.

De oplossing van de vergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = g \quad (2)$$

kan nu worden verkregen door een formele reeksontwikkeling waarvan alle coëfficiënten positief zijn. Bovendien is het aan te tonen, dat deze reeks de reeks, behorend bij f majoreert. Aan de andere kant is het stelsel (2) direct op te lossen. Stel daartoe

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \mu = S/\alpha,$$

zodat $x_1 = \dots = x_n = \frac{S - \mu\alpha}{\alpha n}$, en

$$\frac{dS}{dt} = \frac{n M S(1+S)}{1-S}.$$

Hieruit kan S worden opgelost:

$$n M dt = \frac{1-S}{S(1+S)} dS = \left(\frac{1}{S} - \frac{2}{1+S}\right) dS.$$

$$n M t = \log \frac{S}{(1+S)^2} - \log \frac{\alpha\mu}{(1+\alpha\mu)^2}.$$

S en dus ook $x_1 \dots x_n$ kunnen dus ontwikkeld worden volgens opklimmende machten van μ , indien t voldoende klein is. De reeksen voor de oplossing van (1) zijn dus ook convergent.

2. Periodiciteitsvoorwaarden.

Wij beschouwen nu een systeem differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + \mu f_1(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + \mu f_2(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

waarbij f_1 en f_2 niet-lineaire analytische functies zijn.

Voor $\mu = 0$ wordt het systeem lineair. De karakteristieke vergelijking is

$$S^2 - (a+d)S + (ad-bc) = 0. \quad (2)$$

Periodieke oplossingen voor $\mu = 0$ komen overeen met zuiver imaginaire wortels van vergelijking (2).

Dus: $a + d = 0$, $ad - bc > 0$.

In dit geval zijn er oneindig veel periodieke oplossingen van de vorm:

$$\begin{aligned} x &= x_0(t, K) = K \cos \omega t \\ y &= y_0(t, K) = gK \sin (\omega t + \chi) \end{aligned}$$

waarbij $\omega = \sqrt{ad-bc}$ en g bepaald is.

De fasehoek χ en de amplitude K zijn integratieconstanten. De periode is $\frac{2\pi}{\omega}$.

Veronderstel nu, dat er voor kleine waarden van $\mu \neq 0$ een periodieke oplossing $x=x(t, \mu, K)$; $y=y(t, \mu, K)$ is.

Voor $t=0$ zijn de oplossingen $x(0, \mu, K)$ en $y(0, \mu, K)$ en wij schrijven

$$\begin{aligned} x(0, \mu, K) &= x_0(0, K) + \beta_1, \\ y(0, \mu, K) &= y_0(0, K) + \beta_2. \end{aligned}$$

Volgens de stelling van Poincaré convergeren de ontwikkelingen $x(t, \mu, K)$; $y(t, \mu, K)$ in machtrekken naar μ , β_1 en β_2 indien $|\mu|, |\beta_1|, |\beta_2|$ voldoende klein zijn. Schrijf dus de oplossingen in de vorm:

$$x = x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K); \quad y = y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K).$$

Van een oplossing in de buurt van een periodieke oplossing voor $\mu=0$ met periode T veronderstellen wij, dat de periode $T+\tau$ is.

$$\begin{aligned} x(T+\tau; \mu, \beta_1, \beta_2, K) - x(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0, \\ y(T+\tau; \mu, \beta_1, \beta_2, K) - y(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) &= 0, \end{aligned}$$

waarbij τ, β_1, β_2 functies van μ zijn met:

$$\tau(0) = \beta_1(0) = \beta_2(0) = 0.$$

Daar de fase willekeurig is, kunnen wij $\beta_1=0$ stellen.

Stel dan

$$\begin{aligned} x(T+\tau, \mu, 0, \beta, K) - x(0, \mu, 0, \beta, K) &= \varphi(\tau, \mu, \beta, K) = 0 \\ y(T+\tau, \mu, 0, \beta, K) - y(0, \mu, 0, \beta, K) &= \psi(\tau, \mu, \beta, K) = 0 \end{aligned}$$

Daar voor $\mu=0$ deze vergelijkingen identiek in K vervuld moeten zijn, stellen wij:

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, \mu, \beta, K) &= \mu \varphi_1(\tau, \mu, \beta, K) = 0 \\ \psi(\tau, \mu, \beta, K) &= \mu \psi_1(\tau, \mu, \beta, K) = 0. \end{aligned}$$

Stel, dat $\tau(\mu)$ en $\beta(\mu)$ ontwikkeld zijn in een machtrek:

$$\tau(\mu) = d\mu + e\mu^2 + \dots; \quad \beta(\mu) = d_1\mu + e_1\mu^2 + \dots$$

Door ontwikkeling van φ_1 en ψ_1 krijgen wij:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{01} + a\mu + b\tau + c\beta + \dots = 0 \\ \psi_1 &= \psi_{01} + a_1\mu + b_1\tau + c_1\beta + \dots = 0, \end{aligned}$$

of wel tot op eerste orde termen

$$\varphi_{01} + \mu(a + bd + cd_1) = 0$$

$$\psi_{01} + \mu(a_1 + b_1d + c_1d_1) = 0.$$

Voor voldoende kleine μ moet hieraan voldaan worden, zodat

$$\varphi_{01} = \varphi_{01}(K) = 0; \psi_{01} = \psi_{01}(K) = 0 \text{ en}$$

$$a + bd + cd_1 = 0; a_1 + b_1d + c_1d_1 = 0.$$

Om inderdaad hieruit waarden van d en d_1 op te kunnen lossen, moeten wij veronderstellen, dat

$$J = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\varphi_1, \psi_1)}{\partial(\tau, \beta)} \neq 0.$$

Alleen die periodieke oplossingen, voor $\mu = 0$, waarvoor $\varphi_{01}(K) = \psi_{01}(K) = 0$ zullen periodieke oplossingen voortbrengen van waarden voor $\mu \neq 0$.

Wij passen deze beschouwingen toe op de vergelijking:

$$\ddot{x} + \mu = \mu f(x, \dot{x})$$

en beperken ons tot een benadering van de eerste orde.

Laat $x = x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K)$ een periodieke oplossing zijn in de omgeving van $\mu = 0$.

Stel dan

$$x = \varphi_0 + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \dots$$

waarbij φ_0, A, B en C functies van t zijn.

Dan is

$$\ddot{x} = \ddot{\varphi}_0 + \ddot{A}\beta_1 + \ddot{B}\beta_2 + \ddot{C}\mu + \dots$$

Door substitutie en vergelijking van overeenkomstige coëfficiënten komt er

$$\ddot{A} + A = 0$$

$$\ddot{B} + B = 0$$

$$\ddot{C} + C = f(x_0, \dot{x}_0).$$

Daar, voor $t=0$

$$\beta_1 = x - x_0 = A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu,$$

$$\beta_2 = \dot{x} - \dot{x}_0 = \dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu,$$

verkrijgen wij als beginvoorwaarden voor $t=0$

$$A = 1, \quad \dot{B} = 1$$

$$B = \dot{A} = C = \dot{C} = 0.$$

Dus wordt de oplossing:

$$A = \cos t, \quad B = \sin t,$$

$$C = \int_0^t f(x_0, \dot{x}_0) \sin(t-u) du.$$

Daar wij periodieke oplossingen zoeken, berekenen wij A, B en C na één periode. Voor A en B is deze 2π :

$$A(2\pi) = \dot{B}(2\pi) = 1, \quad \dot{A}(2\pi) = B(2\pi) = 0.$$

$$C(2\pi) = - \int_0^{2\pi} f(x_0, \dot{x}_0) \sin u \, du, \quad \dot{C}(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(x_0, \dot{x}_0) \cos u \, du.$$

Stel nu, met $x_0(t) = K \cos t$, $\dot{x}_0(t) = -K \sin t$, dan komen (via C) de voortbrengende amplitudes K reeds in de uitdrukkingen van β_1 en β_2 voor, zodat wij de vergelijkingen, die de periode $2\pi + \tau$ geven, kunnen schrijven als:

$$\varphi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2) = 0, \quad \psi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2) = 0.$$

Nu is, voor kleine τ

$$x(2\pi + \tau) = x(2\pi) + \tau \dot{x}(2\pi) + \dots$$

$$\dot{x}(2\pi + \tau) = \dot{x}(2\pi) + \tau \ddot{x}(2\pi) + \dots$$

of wel:

$$x(2\pi + \tau) = x_0(2\pi) + A(2\pi) \beta_1 + B(2\pi) \beta_2 + C(2\pi) \mu + \tau \dot{x}_0(2\pi) + \dots$$

$$\dot{x}(2\pi + \tau) = \dot{x}_0(2\pi) + \dot{A}(2\pi) \beta_1 + \dot{B}(2\pi) \beta_2 + \dot{C}(2\pi) \mu + \tau \ddot{x}_0(2\pi) + \dots$$

of wel, daar $x(0) = x_0 + \beta_1$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 + \beta_2$,

$$x(2\pi + \tau) - x(0) = C(2\pi) \mu + \dots = 0$$

$$\dot{x}(2\pi + \tau) - \dot{x}(0) = -K\tau + \dot{C}(2\pi) \mu + \dots = 0$$

of wel

$$C(2\pi) = - \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = 0$$

$$\tau = \frac{\dot{C}(2\pi) \mu}{K} = \frac{\mu}{K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du = \mu \psi(K).$$

Hieruit moet de voortbrengende amplitude K worden bepaald.

Dan volgt de correctie τ op de periode, indien $\dot{C}(2\pi) \neq 0$ is.

Voorbeeld.

Als voorbeeld beschouwen wij het circuit van fig.1 met inductieve roosterkoppeling.

De differentiaalvergelijking is

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = \lambda \frac{dI_a}{dt}.$$

I_a = anodestroom. Laat I_a als functie van de roosterspanning gegeven worden door:

$$I_a = I_0 + S_1 V_g + S_2 V_g^2 + \dots$$

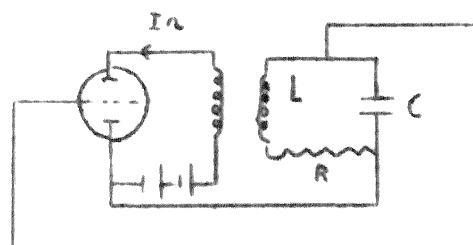


fig.1

Wij verschuiven de oorsprong en veronderstellen, dat de karakteristiek symmetrisch is. Voeren wij nu een dimensielloze variabele $v = \frac{V}{V_s}$ (V_s = verzadigingsspanning) in, dan kunnen wij schrijven:

$$I_a = V_s (\beta_1 v - \delta_1 v^3)$$

waarbij β_1 en δ_1 positief zijn.

Wij drukken nu alle grootheden in v uit

$$v = \frac{1}{C V_s} \int i \, dt; \dot{v} = \frac{i}{C V_s}; \ddot{v} = \frac{1}{C V_s} \frac{di}{dt}.$$

Door differentiatie ontstaat

$$\frac{d I_a}{dt} = \frac{d I_a}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = V_s (\beta_1 - 3 \delta_1 v^2) \dot{v}.$$

Substitutie geeft de differentiaalvergelijking

$$LC \ddot{v} + [RC - \lambda (\beta_1 - 3 \delta_1 v^2)] \dot{v} + v = 0.$$

Voeren wij een dimensielloze tijd τ in door $\tau = \omega_0 t$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, dan kan de vergelijking worden geschreven:

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + v = \mu [\beta(\lambda) - 3 \delta(\lambda) v^2] \frac{dv}{d\tau}.$$

Voor $\mu=0$ zijn de voortbrengende oplossingen van de vorm:

$$v_0 = \varphi_0(t) = K \cos t, \quad \dot{v}_0 = \dot{\varphi}_0(t) = -K \sin t$$

$$\text{en } f(v_0, \dot{v}_0) = -\beta K \sin t + 3 \delta K^3 \cos^2 t \sin t.$$

De voorwaarde voor K wordt dus:

$$\int_0^{2\pi} [-\beta K \sin t + 3 \delta K^3 \cos^2 t \sin t] \sin t \, dt = 0,$$

waaruit volgt:

$$\beta K - \frac{3}{4} \delta K^3 = 0$$

$$\text{of } K^2 = \frac{4\beta}{3\delta}.$$

De amplitude van de trilling wordt groter als δ kleiner is, dit is duidelijk, want δ geeft het limiteringsmechanisme.

Het blijkt, dat in de eerste orde theorie τ niet verandert.

Om verder te gaan, moeten wij tweede orde theorie toepassen.

Het blijkt, dat tenslotte

$$v = 2 \sqrt{\frac{\beta}{3\delta}} \cos \left[\left(1 - \frac{\mu^2 \beta^2}{2}\right)t + \psi \right] + \mu \left(-\frac{\beta}{4}\right) \sqrt{\frac{\beta}{3\delta}} \sin 3 \left[\left(1 - \frac{\mu^2 \beta^2}{2}\right)t + \psi \right] + \mu \frac{\beta}{4} \sqrt{\frac{\beta}{3\delta}} \sin \left[\left(1 - \frac{\mu^2 \beta^2}{2}\right)t + \psi \right] + \mu^2 \left[\dots \right] \dots$$

waarbij ψ een willekeurige fasehoek is.